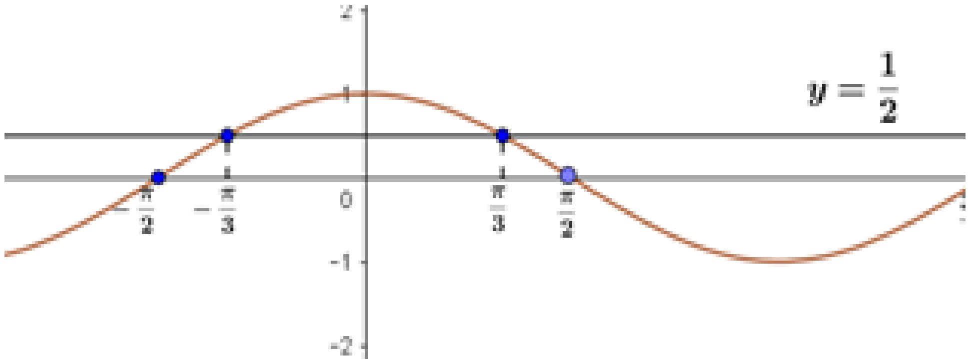
Néhány trigonometrikus azonosság
1.) $sin^2 \propto +cos^2 \propto = 1$
2.) $1 + tg^2 \propto = \frac{1}{cos^2 \propto}$ (az azonosság az előzőből adódik úgy, hogy azt osztjuk $cos^2 \propto$ -val, $cos^2 \propto \neq 0$)
3.) $ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$
4.) $\cos(\propto \pm \beta) = cos \propto cos\beta \mp sin \propto sin\beta$
5.) $\sin(\propto \pm \beta) = sin \propto cos\beta \pm cos \propto sin\beta$
6.) Az 4. és 5. képletből $\propto = \beta$ jelöléssel adódik, hogy $\cos(2 \propto) = cos^2 \propto - sin^2 \propto$ $\sin(2 \propto) = 2sin \propto cos \propto$

Trigonometrikus egyenletek

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

Az egyenlet megoldásához a grafikus módszert választjuk. Ábrázoljuk az egyenlőségjel mindkét oldalán lévő függvényt, majd megkeressük a függvények grafikonjainak metszéspontjait.



A két grafikonnak 2πperiodușon belül két metszéspontja is van. Felhasználva, hogy az$f(x) = \cos x$ függvény periodusa 2π, így az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l = \frac{5\pi}{3} + 2\pi m, \qquad l, m \in \mathbb{Z}$$

Másik megoldási módszer:

Felhasználjuk azt, hogy az $f(x) = cosx$ függvény az első és a negyedik síknegyedben pozitív, illetve hogy a függvény felveszi az $\frac{1}{2}$ értéket az $x = \frac{\pi}{3}$ hegyesszög (első síknegyed) és az $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$(negyedik síknegyed) mellett. Akkor az egyenlet megoldási

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l = \frac{5\pi}{3} + 2\pi m, \qquad l, m \in \mathbb{Z}$$

Tételek a szögfüggvények alkalmazására általános háromszögekben

Szinusztétel

Legyen az *ABC* háromszög három oldala a, b, c, az oldalakkal szemközti szögek pedig rendre α, β, γ. Ekkor

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$

Azaz az oldalak aránya megegyezik a megfelelő oldalakkal szemközti szögek szinuszának arányával.

PÉLDA: Egy háromszög két szöge $\alpha = 83^0, \beta = 67^0$, a nagyobikkal szemközti oldalának hossza $a = 21\ cm$. Határozzuk meg a többi oldalt és szöget.

Megoldás:

A harmadik szög egyszerű kivonással adódik:

$$\gamma = 180^0 - \alpha - \beta = 30^0.$$

A b és c oldalt szinusztétellel könnyen meg tudjuk határozni:

$$\frac{b}{21} = \frac{sin67^0}{sin83^0} \Longrightarrow b \approx 19{,}5\ cm \quad \text{és} \quad \frac{c}{21} = \frac{sin30^0}{sin83^0} \Longrightarrow c \approx 10{,}6\ cm$$

Koszinusztétel

Legyen az *ABC* háromszög három oldala a, b, c, az oldalakkal szemközti szögek pedig rendre α, β, γ. Ekkor

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$$

Egy háromszög két oldala $a = 12\ cm, b = 15cm$ és az általuk bezárt szög $\gamma = 60^0$. Határozzuk meg a harmadik oldalt!

<u>Megoldás:</u>

A koszinusztételt felhasználva

$$c^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot cos60^0 \implies$$

$$c^2 = 144 + 225 - 360 \cdot \frac{1}{2} = 189 \Rightarrow$$

$$c \approx 13{,}7\ cm$$

Feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a $2sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=-\sqrt{3}$ egyenletet!

Megoldás:

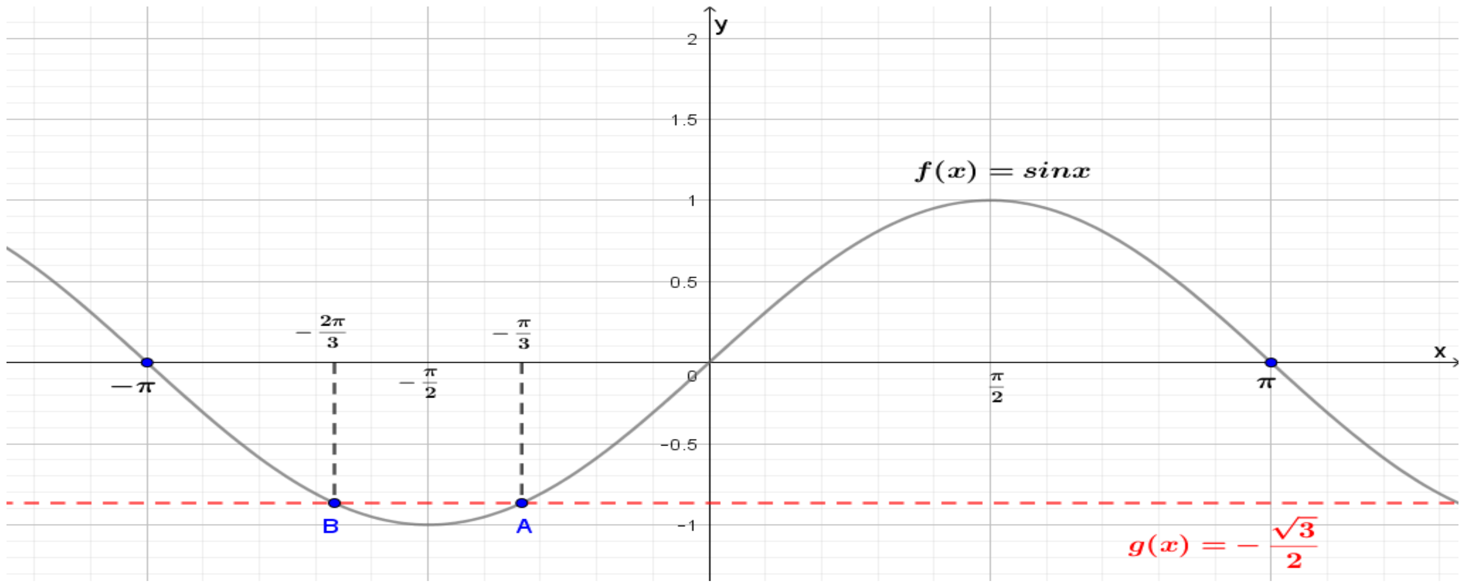
Az adott egyenlet ekvivalens a $sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlettel.

Jelölje $a=3x-\frac{\pi}{5}$. Akkor meg kell oldanunk a

$$\sin(a)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

egyenletet.

Ábrázolva az egyenlőségjel két oldalán lévő függvényt, azaz az $f(x)=sinx$ és a $g(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ megkeressük azok metszéspontjait (egyenlet megoldása grafikus módszerrel).



Az ábra is jól mutatja, hogy a két grafikon két pontban (*A* és *B*) metszi egymást egy perioduson belül. Tehát az utóbbi egyenlet megoldásai:

$$a_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$a_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z}$$

Visszahelyettesítve az $a = 3x - \frac{\pi}{5}$ kifejezésbe egyrészt azt kapjuk, hogy

$$3x - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \Longrightarrow x_1 = -\frac{2\pi}{45} + \frac{2\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$$

másrészt

$$3x - \frac{\pi}{5} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Longrightarrow x_2 = -\frac{7\pi}{45} + \frac{2\pi}{3}l, \qquad l \in \mathbb{Z}$$

Feladat: Egy harmonikus rezgő mozgást végző test kitérés-idő függvénye

$$y(t) = 6\sin(2t)\ (0 \leq t \leq 120),$$

ahol az időt másodpercben, a kitérést méterben mérjük.

a) Mennyi a maximális kitérés?

b) Adjuk meg azokat az időpillanatokat, amikor a kitérés 3 méter!

c) Vázoljuk a kitérés-idő függvény grafikonját a $[0; 10\pi]$ időintervallumban!

<u>Megoldás:</u>

a) Mivel minden x esetén $-1 \leq \sin x \leq 1$, ezért

$$-6 \leq 6\sin(2t) \leq 6,$$

így a maximális kitérés 6 méter.

b) Meg kell oldanunk a

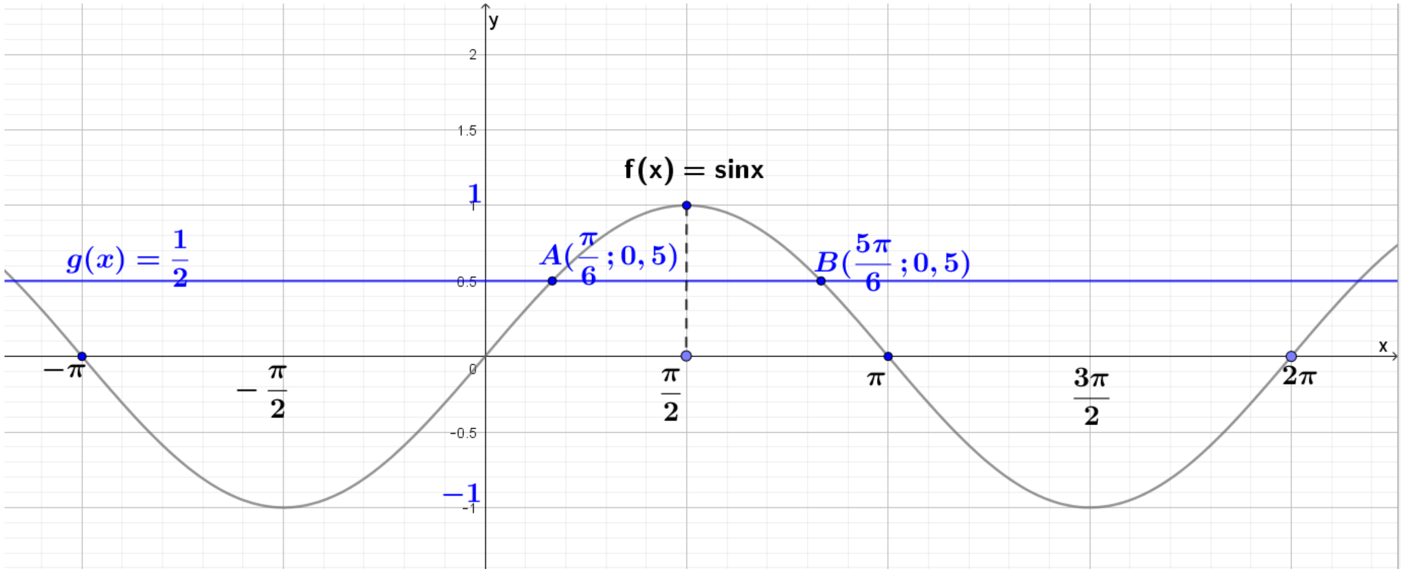
$$6\sin(2t) = 3$$

trigonometrikus egyenletet. Mindkét oldalt elosztjuk 6-tal

$$\sin(2t) = \frac{1}{2}$$

Az egyenlőség megoldásához ábrázoljuk az $f(x) = \sin x$, az egyenlőség bal oldalán lévő alapfüggvényt, illetve a $g(x) = 0{,}5$, az egyenlőség jobb oldalán lévő konstans függvényt.

A két függvény grafikonja egy perióduson belül két pontban metszi egymást.



Ezt tudva adódik, hogy

$$2t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ 0 \le k \le 38$$

vagy

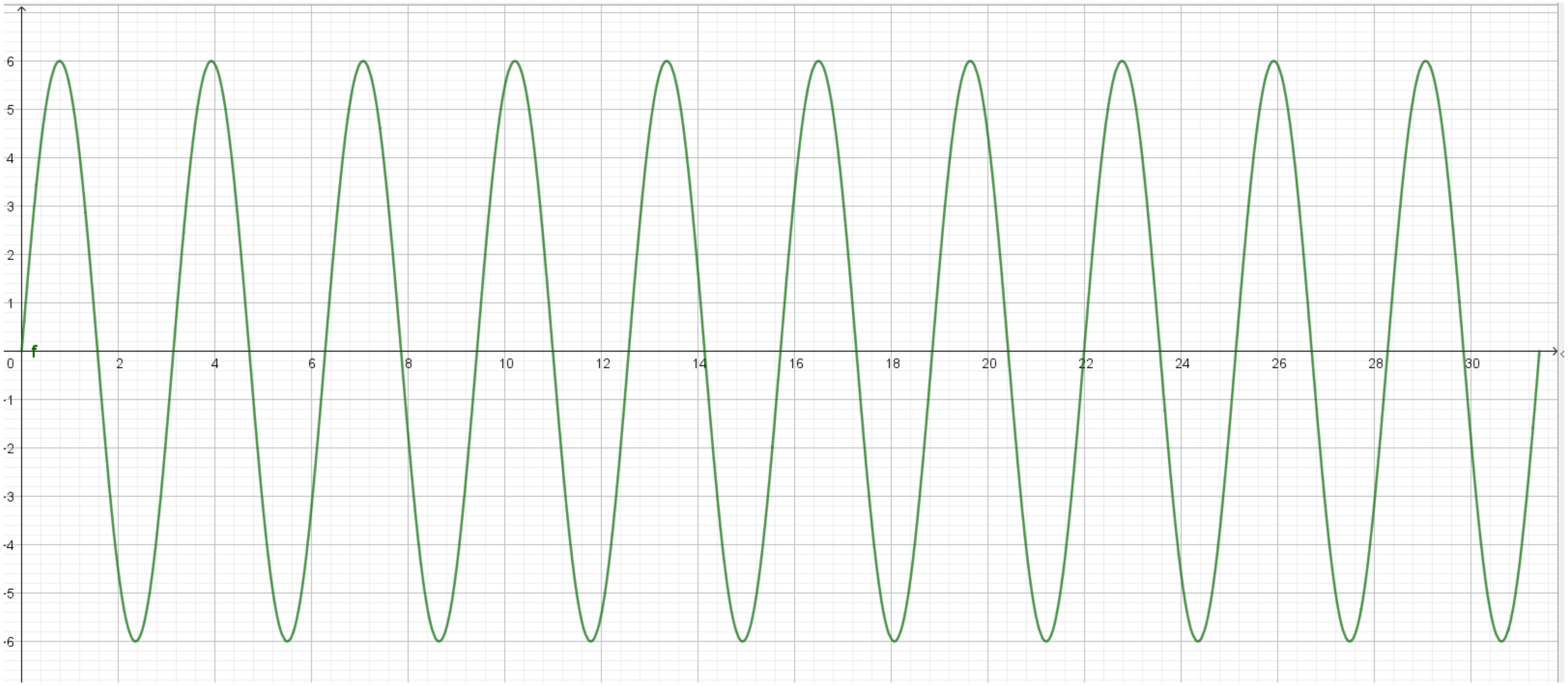
$$2t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l,\ \ 0 \le l \le 37$$

(Megjegyzés: a k és l értékekre a fenti kikötés a $0 \le t \le 120$ feltétel miatt van.)

Ezért

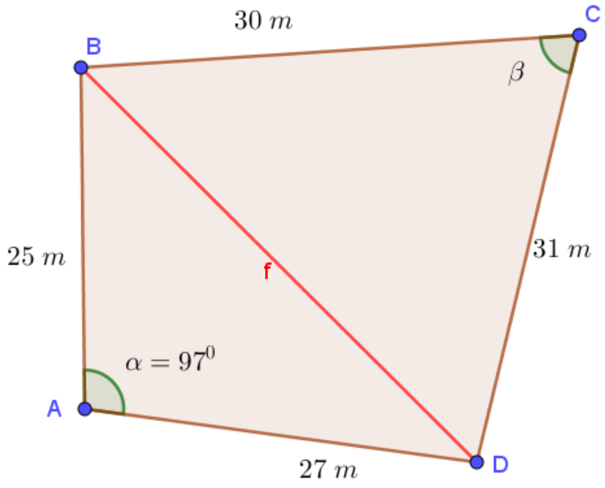
$$t = \frac{\pi}{12} + \pi k,\ \ 0 \le k \le 38 \text{ vagy } t = \frac{5\pi}{12} + \pi l,\ \ 0 \le l \le 37$$

c) A függvény grafikonja



Feladat: Egy konvex négyszög alakú telek oldalainak hossza egy adott körüljárás szerint rendre *27 m*, *25 m*, *30 m* és *31 m*. A *27 m*-es és a *25 m*-es oldalaknál a teleknek 97°-os szöge van. Határozzuk meg az ezzel a szöggel szembeni szöget!

<u>Megoldás:</u>



Az ABD háromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$BD^2 = 25^2 + 27^2 - 2 \cdot 25 \cdot 27 \cdot cos97^0$$

$$BD^2 \approx 625 + 727 - 1350 \cdot (-0,12) = 1518,5$$

$$BD \approx 39[m]$$

A BCD háromszögben is alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$39^2 = 30^2 + 31^2 - 2 \cdot 30 \cdot 31 \cdot cos\beta$$

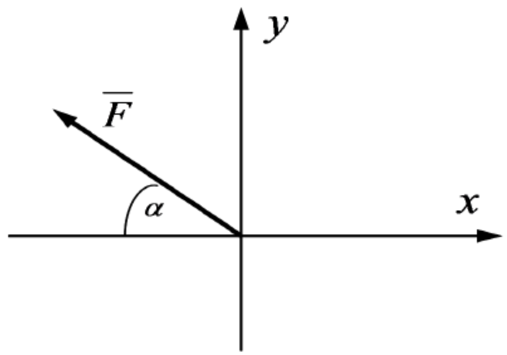
$$1521 = 900 + 961 - 1860 \cdot cos\beta$$

$$1521 = 1861 - 1860 \cdot cos\beta$$

$$-340 = -1860 \cdot cos\beta$$

$$cos\beta = \frac{-340}{-1860} \approx 0,1828 \Longrightarrow \beta \approx 79^0$$

Feladat: Az $\vec{F}$ erő nagysága $\left|\vec{F}\right| = F = 500\ N$, az x-tengellyel bezárt szöge $\alpha = 42^0$. Határozzuk meg az erő koordinátáit az ábrán látható koordináta-rendszerben!



<u>Megoldás:</u>

Az x-irányú komponens

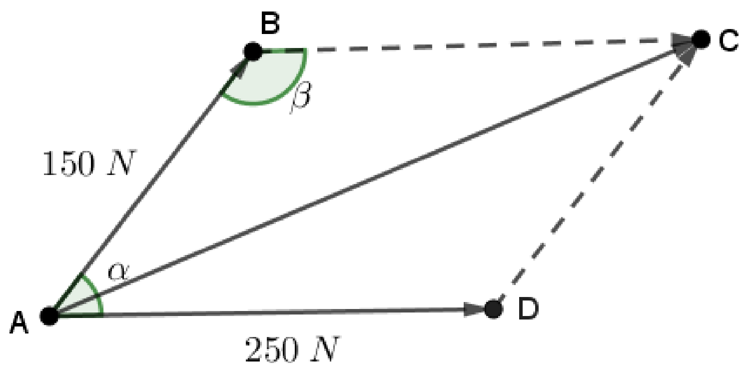
$$F_x = -F \cdot cos\alpha = -500 \cdot cos42^0 \approx -372\ [N].$$

Az y-irányú komponens

$$F_y = F \cdot sin\alpha = 500 \cdot sin42^0 \approx 335\ [N].$$

Feladat: Egy testre két erő hat. Az egyik 150N, a másik 250N nagyságú. A két erő 50^0-os szöget zár be egymással. Mekkora az eredő erő és hány fokos szöget zár be a nagyobbik erővel?

Megoldás:



Mivel az $ABCD$ paralelogramma α hegyesszöge 50^0-os, ezért $\beta = 130^0$. Így az ABC háromszögben a koszinusztétellel könnyen kiszámíthatjuk az eredő erőt.

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 150^2 + 250^2 - 2 \cdot 150 \cdot 250 \cdot cos130^0$$

$$\Longrightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| \approx 365\ [N].$$

Ennek az eredő erőnek a nagyobbik erővel bezárt szöge a $DAC\angle$. Felhasználva a szinusztételt

$$\frac{\sin(DAC\angle)}{DC} = \frac{sin130^0}{AC} \Longrightarrow \sin(DAC\angle) = \frac{DC \cdot sin130^0}{AC}$$

$$\sin(DAC\angle) \approx 0{,}31 \Longrightarrow DAC\angle = \arcsin(0{,}31) \approx 20^0.$$

A CDF háromszögben koszinusztétel alapján

$$m^2 = 30^2 + 53^2 - 2 \cdot 30 \cdot 53 \cdot cos44{,}47^0 \approx 3709 - 3180 \cdot 0{,}71 = 1439{,}69$$

Akkor $m \approx 37{,}94\ [m]$.