### 3.1.2 Anyagi pont kinetikai vizsgálata

#### 3.1.2.1 Newton törvényei, erőtörvények.

***Elméleti összefoglaló***

---

***Newton törvényei:***

**Newton törvényei** a kinetika alaptörvényei (axiómái). A kinetika alapfeltevése az, hogy mindig található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben **Newton I. törvénye** teljesül. Az ilyen vonatkoztatási rendszert **inerciarendszereknek** nevezzük. A klasszikus mechanikában a Földhöz rögzített, vagy ahhoz képest állandó sebességgel haladó vonatkoztatási rendszer inerciarendszernek tekinthető. A Földhöz képest gyorsuló rendszerek nem inercia rendszerek.

***Newton I. törvénye (tehetetlenség törvénye):***

Ha egy test nincs mechanikai kölcsönhatásban más testekkel, vagy azok hatásai kioltják egymást, akkor a test sebessége időben állandó, azaz egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban van.

$$\boldsymbol{\bar{v}(t) = \bar{v} = \text{á}llandó} \quad \textbf{(3.52)}$$

*Megjegyzés:* A test sebessége alatt **tömegközéppontjának** sebességét értjük.

***Newton II. törvénye (mozgásegyenlet):***

Ha egy test mechanikai kölcsönhatásban van más testekkel, akkor azok együttes hatása egyértelműen meghatározza a test tömegének és gyorsulásának szorzatát. Az együttes hatás jellemzésére bevezetjük az **eredő erő** fogalmát.

$$\boldsymbol{\bar{F} = m \cdot \bar{a},\ \bar{F} = [N]} \quad \textbf{(3.53)}$$

***Megjegyzés:***

A test gyorsulása alatt **tömegközéppontjának** gyorsulását értjük. Speciálisan, ha a testre ható eredő erő zérus, akkor a test **egyensúlyban** van. Egyensúly esetén a test gyorsulása zérus, azaz tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban van. Egyensúly esetén Newton II. törvénye az alábbi egyensúlyi egyenletté egyszerűsödik:

$$\boldsymbol{\bar{F} = \bar{0}} \quad \textbf{(3.54)}$$

***Newton III. törvénye (hatás-ellenhatás törvénye):***

Két test kölcsönhatása során teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\boldsymbol{\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}} \quad \textbf{(3.55)}$$

Ahol $\bar{F}_{12}$ az egyes test által a kettesre kifejtett erőt jelenti. Az $\bar{F}_{21}$ erőt az $\bar{F}_{12}$ erő **reakcióerejének** vagy **ellenerejének** nevezzük.

***Newton IV. törvénye (erőhatások függetlenségének elve):***

Ha egy test egyidejűleg több testtel is mechanikai kölcsönhatásban van, akkor a Newton II. törvényében szereplő $\bar{F}$ eredő erő helyére azon $\bar{F}_i$ erők vektoriális összegét kell írni, amelyeket az egyes testek külön-külön, a többi test hiányában fejtenének ki az anyagi pontra. Azaz az egyes erők függetlenül fejtik ki hatásukat.

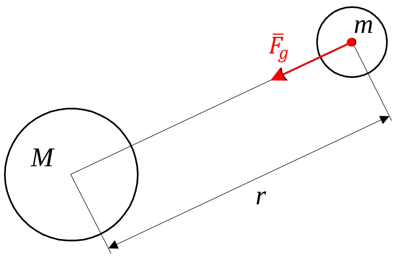
$$\boldsymbol{\bar{F} = \textstyle\sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \cdots + \bar{F}_i + \cdots} \quad \textbf{(3.56)}$$

***Erőtörvények:***

A konkrét számítások esetében meg kell adnunk az erőt a mechanikai kölcsönhatást jellemző paraméterek függvényében. Azaz meg kell adnunk az erő **erőtörvényét**. A továbbiakban a legfontosabb erőtípusokkal foglalkozunk, és megadjuk a hozzájuk tartozó erőtörvényt.

***Gravitációs erő***

Bármely két tömeggel rendelkező test között fellép a **gravitációs erő**, amely vonzó jellegű (*12. ábra*).




1. ábra

Az erő nagysága az alábbi összefüggéssel számolható:

$$|\bar{\boldsymbol{F}}_g| = \boldsymbol{F}_g = \boldsymbol{\gamma}\frac{\boldsymbol{mM}}{\boldsymbol{r}^2} \qquad \textbf{(3.57)}$$

ahol $\gamma = 6{,}679 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$ a gravitációs állandó, $m$ és $M$ a két test tömege, $r$ pedig a két test tömegközéppontjának távolsága. Az erő nagysága akkor számottevő, ha legalább az egyik test nagyon nagy tömegű (pl. egy égitest). A műszaki gyakorlatban a nagy tömegű test általában a Föld. Egy a Föld felszínén mozgó test esetén az $r$ távolság megegyezik a Föld sugarával ($R_F$), így a gravitációs erő nagysága az alábbi, egyszerű formában írható:

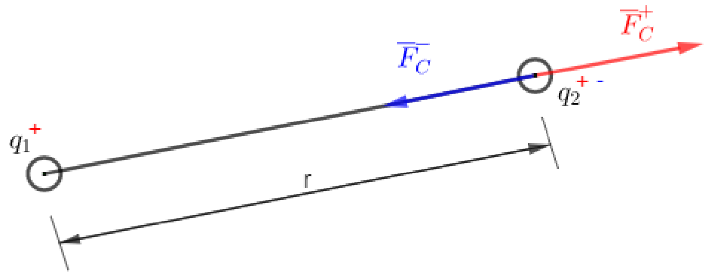
$$|\bar{\boldsymbol{F}}_g| = \boldsymbol{F}_g = \left(\boldsymbol{\gamma}\frac{\boldsymbol{M_F}}{\boldsymbol{R_F}^2}\right)\boldsymbol{m} = \boldsymbol{gm} = \text{á}\boldsymbol{lland}\text{ó} \qquad \textbf{(3.58)}$$

Az összefüggésben $g$ a **gravitációs gyorsulás** nagysága, $M_F$ és $R_F$ a Föld tömege és sugara. Mivel a Föld nem tökéletesen gömb alakú, a gravitációs gyorsulás nagysága kis mértékben függ a földrajzi helytől, értéke Magyarország területén vagy azzal azonos földrajzi szélességeken $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$.

***Coulomb-féle erőtörvény***

A Coulomb törvény két elektromosan töltött test között fellépő erő nagyságát adja meg az alábbi összefüggés szerint:

$$|\bar{\boldsymbol{F}}_C| = \boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{k} \cdot \frac{|q_1|\cdot|q_2|}{\boldsymbol{r}^2} \qquad \textbf{(3.19)}$$




2. ábra

A fenti összefüggésben $q_1$ és $q_2$ a két test elektromos töltése, r a két test töltésközéppontjának távolsága, k a Coulomb állandó, amely az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\boldsymbol{k = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} \qquad \textbf{(3.60)}$$

ahol $\varepsilon_0$ a vákuum dielektromos állandója, vagy más néven a vákuum permittivitás, amelynek értéke

$$\boldsymbol{\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2}\right]} \qquad \textbf{(3.61)}$$

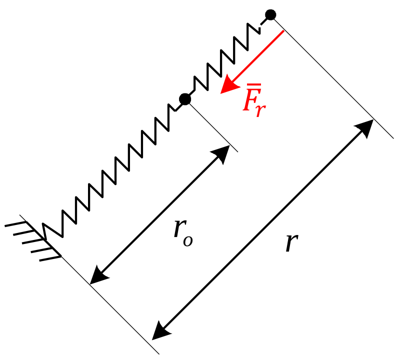
$\varepsilon_r$ pedig a töltések közötti teret kitöltő anyag relatív dielektromos állandója (relatív permittivitása). Az alábbi táblázat a relatív dielektromos állandó értékét mutatja néhány anyag esetében.

| **Anyag** | $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ |
|---|---|
| Vákuum | 1 |
| Levegő | 1,0006 |
| Paraffin | 1,9-2,2 |
| Csillám | 4-8 |
| Üveg | 5-16 |
| Porcelán | 5,5-6 |
| Víz | 81 |
| Petróleum | 2,1 |

A Coulomb erő iránya a két test töltésközéppontját összekötő szakasszal párhuzamos, egynemű töltések esetén az erő taszító, míg ellentétes neműek esetén vonzó jellegű.

***Rugalmas erő***

Ha egy ideális spirálrugót megnyújtunk, vagy összenyomunk akkor az a hossztengelyével egyező irányú, a megnyúlással/összenyomódással ellentétes értelmű erőt fejt ki.




3. ábra

A rugó által kifejtett erő nagyságát az alábbi összefüggés szolgáltatja:

$$|\bar{F}_r| = F_r = D \cdot \Delta r \quad \text{(3.22)}$$

$$D = \left[\frac{N}{m}\right] \quad \text{(3.33)}$$

ahol $D$ a **rugómerevség**, $\Delta r$ pedig a rúgó **megnyúlása/összenyomódása**, amelyet az alábbi összefüggés értelmez:

$$\Delta r = |r - r_0| \quad \text{(3.44)}$$

A fenti összefüggésben $r_0$ és $r$ a rugó terheletlen, és megnyújtott (összenyomott) hosszúsága.

***Közegellenállási erő***

Egy folyadékban, vagy gázban mozgó testre **közegellenállási erő** hat, amely a test pillanatnyi sebességével azonos irányú, de ellentétes értelmű. Kis sebességek esetén az erő nagysága a közeghez viszonyított sebesség ($v$) első, a sebesség növelésével egyre inkább annak második hatványával arányos. (Kis sebességről addig beszélünk, amíg a közeg örvénymentesen áramlik a test körül.) Ha a test speciálisan gömb alakú, kis sebességeknél az erő nagyságára teljesül a **Stokes-törvény**:

$$|\bar{F}_{KE}| = F_{KE} = 6\pi R\eta v \quad \text{(3.65)}$$

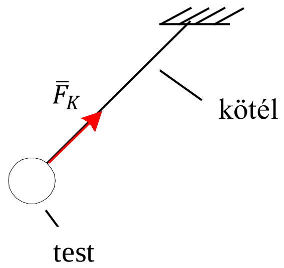
Az összefüggésben $R$ a gömb sugara $\eta$ pedig a folyadék vagy gáz **dinamikus viszkozitása**. A viszkozitás a folyadék **belső súrlódását** jellemzi. Nagyobb sebességeknél egy tetszőleges alakú testre ható erő nagyságára az alábbi összefüggés érvényes:

$$|\bar{F}| = F = \frac{1}{2} C A \rho v^2 \quad \text{(3.56)}$$

Az egyenletben szereplő $C$ konstans az **alaki tényező** (a test „áramvonalasságát" jellemzi), az $A$ konstans a test **homlokfelülete** (a sebességre merőleges legnagyobb keresztmetszete), $\rho$ a közeg sűrűsége.

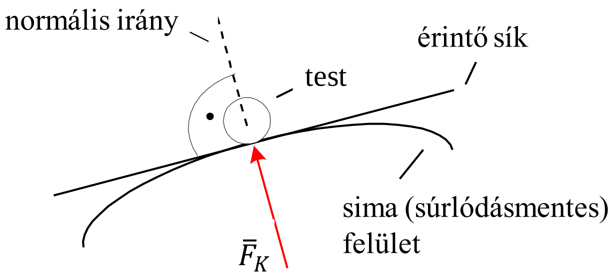
***Kényszererők***

Számos gyakorlati esetben a test csak egy előírt felület vagy pálya mentén mozoghat. Erre példa egy vasúti kocsi, amely csak a sínen haladhat, vagy egy nyújthatatlan kötélre függesztett pontszerű test, amelynek mozgása egy körvonalra vagy gömbfelületre korlátozott. De példaként említhetünk egy síkfelületű merev lejtőn, vagy hepehupás dombvidéken haladó gépkocsit. Az előírt pályán/felületen történő mozgást minden esetben egy **merev (nem deformálható) test** által kifejtett erő biztosítja. A fenti példákban a merev test a sín, a nyújthatatlan kötél, merev lejtő vagy dombvidék, amelyeket összefoglaló néven **kényszereknek** nevezünk, a kényszerek által kifejtett erőt pedig **kényszererőnek**. A kényszererőkre mindig teljesül valamilyen feltétel. A kötélerő kötélirányú és húzó jellegű.



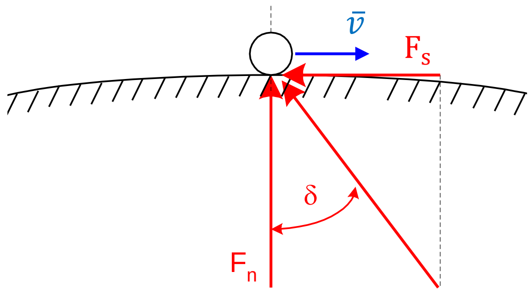

4. ábra

Egy ideálisan sima (súrlódásmentes) felület vagy görbe által kifejtett kényszererő a felületre (görbére) merőleges irányú és nyomó jellegű.




5. ábra

A valóságban minden felületnek van **érdessége**, ami azt eredményezi, hogy a kényszererőnek a felület síkjába eső (görbe érintőjének irányába mutató) komponense is van. Ezt a komponenst mozgó pont esetén **csúszási súrlódási**, míg nyugvó pont esetén **tapadási súrlódási komponensnek** nevezzük. A csúszási súrlódási komponens mindig az anyagi pont sebességével egyező irányú, de azzal ellentétes értelmű (*16. ábra*).




6. ábra

Nagysága egyenesen arányos a felületre (görbe érintőjére) merőleges komponens nagyságával.

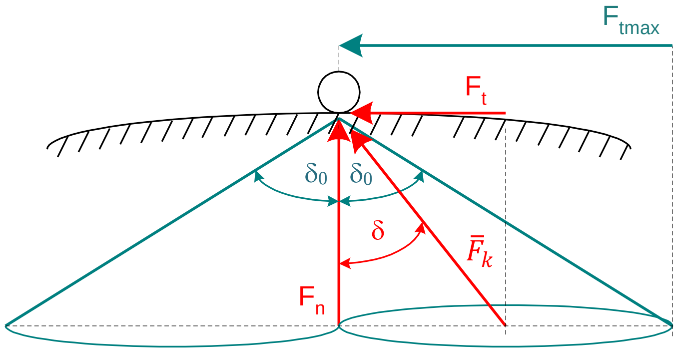
$$\boldsymbol{F_s = \mu F_n,}\quad (\boldsymbol{\mu = tg\delta})\ \textbf{(3.67)}$$

A felület érdességét jellemző $\mu$ arányossági tényezőt **csúszási súrlódási tényezőnek** nevezünk.

Nyugvó pont esetén – rögzített nagyságú $F_n$ nyomókomponens mellett – az $F_t$ tapadási súrlódási komponensnek létezik egy $F_{t\,max}$ maximális értéke, amely fölé nem emelkedhet, mert akkor bekövetkezik a megcsúszás. Ez a maximális érték arányos az $F_n$ komponens nagyságával. Az arányossági tényezőt **tapadási súrlódási tényezőnek** nevezzük, jele: $\mu_0$. Tehát:

$$\boldsymbol{F_{t\,max} = \mu_0 F_n\,,}\quad (\boldsymbol{\mu = tg\delta_0})\quad \textbf{(3.78)}$$

Az elmondottakból adódik, hogy egyensúly esetén az $\overline{F}_k$ kényszererő mindig egy olyan kúpon belül, vagy határesetben annak alkotóján helyezkedik el, amelynek csúcsa egybeesik az anyagi ponttal, szimmetria tengelye a nyomókomponens egyenese, fél nyílásszögét pedig az $\delta_0 = arctg\mu_0$ összefüggés szolgáltatja. A fenti kúpot **súrlódási kúpnak** nevezzük (*18. ábra)*.




7. ábra

Az elmondottak alapján tehát mindig teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

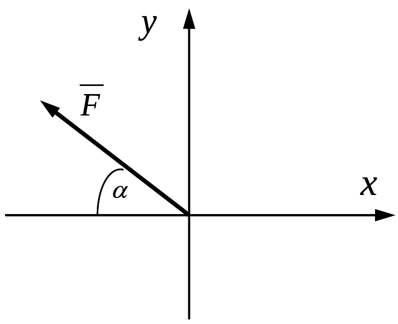
$$\boldsymbol{F_t \leq \mu_0 F_n = F_{t\,max}} \quad \textbf{(3.89)}$$

***Órai feladatok***

---

2.1 Az $\overline{F}$ erő nagysága és az $x$ koordináta tengellyel bezárt szöge ismert.

Adatok: $F = 500[N], \alpha = 40°$

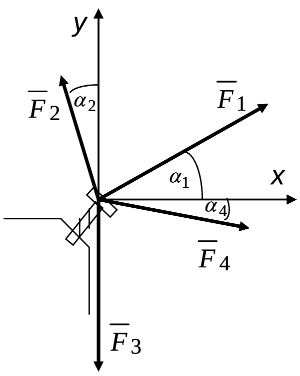



Határozza meg az erő koordinátáit az ábrán látható koordinátarendszerben és írja fel az erőt oszlopvektoros formában!

2.2 Egy csavarfejre négy erő hat az ábra szerint. Az erők nagysága, valamint koordinátatengelyekkel bezárt szöge ismeretes.

Adatok: $F_1 = 150[N], F_2 = 80[N], F_3 = 110[N], F_4 = 100[N]$

$\alpha_1 = 30°, \alpha_2 = 20°, \alpha_4 = 15°$



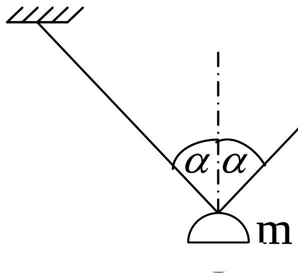

a) Írjuk fel az egyes erőket koordinátáikkal oszlopvektoros formában, majd számítsuk ki az eredő erőt!

b) Adja meg az eredő nagyságát és $x$ tengellyel bezárt hegyes szögét!

c) Szerkesztéssel is határozza meg az eredő erőt!

2.3 Az ábrán látható $m$ tömegű lámpát két egyforma hosszúságú kötéllel a mennyezethez rögzítettük.

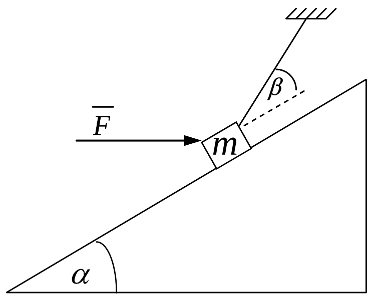
Adatok: $m = 15$[kg], $\alpha = 40°$,$g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$




a) Rajzoljuk be a lámpára ható erőket!
b) Válasszunk egy célszerű koordinátarendszert, és írjuk fel benne a lámpa egyensúlyi egyenleteit, majd határozzuk meg a kötelekben ébredő erő nagyságát!
c) Szerkesztéssel is határozzuk meg a kötelekben ébredő erőket!

2.4 Egy $m$ tömegű pontszerű testet az $\alpha$ hajlásszögű, tökéletesen sima lejtőn egy rúddal, valamint egy vízszintes irányú $\overline{F}$ erővel tartunk egyensúlyban az ábra szerint.

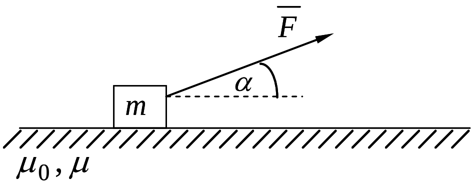
Adatok: $F = 200[N]$, $m = 17$[kg], $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$




a) Rajzoljuk be a testre ható erőket!
b) Válasszunk egy célszerű koordinátarendszert, majd írjuk fel a test egyensúlyi egyenleteit, majd határozza meg az $\overline{F}_r$ rúderő, valamint a lejtő által a testre kifejtett $\overline{F}_k$ kényszererő nagyságát.
c) Határozzuk meg a rúd és kényszererőt szerkesztéssel!

2.5 Egy vízszintes, érdes síkon nyugvó pontszerű testre állandó $\overline{F}$ erővel hatunk az ábra szerint.

Adatok:, $m = 1000$[kg], $\mu_0 = 0{,}3$, $\mu = 0{,}1$, $\alpha = 15°$,,$g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$

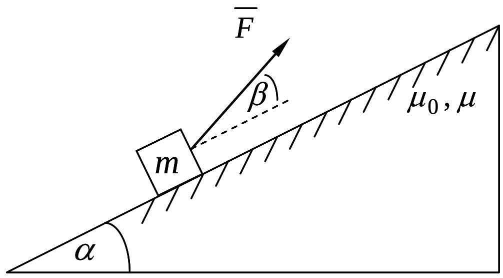



a) Milyen $F_{min}$ és $F_{max}$ határok között változhat $F$ értéke a test egyensúlya esetén?

b) Ha $F = 5[\text{kN}]$, akkor mekkora a test gyorsulása, és a talaj által kifejtett kényszererő nagysága a mozgás során?
c) Mekkora lesz a b) esetben a test sebessége $\Delta t = 10[s]$ idő elteltével?
d) Mekkora $\Delta s$ pályaszakaszt fut be a test a megadott $\Delta t$ idő alatt?

2.6 Egy érdes, $\alpha$ hajlásszögű lejtőn fekvő pontszerű testre állandó $\bar{F}$ erővel hatunk az ábra szerint.

Adatok: $m = 500[\text{kg}]$, $\mu_0 = 0{,}35$, $\mu = 0{,}1$, $\alpha = 15°$, $\beta = 10°$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$

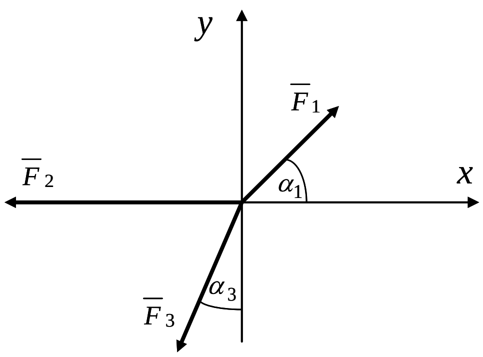



e) Milyen $F_{min}$ és $F_{max}$ határok között változhat $F$ értéke a test egyensúlya esetén?
f) Ha $F = 5[\text{kN}]$, akkor mekkora a test gyorsulása, és a talaj által kifejtett kényszererő nagysága a mozgás során?
g) Mekkora lesz a test sebessége $\Delta t = 3[s]$ idő elteltével?
h) Mekkora $\Delta s$ pályaszakaszt fut be a test a megadott $\Delta t$ idő alatt?

***Otthoni feladatok:***

2.1* Az ábrán látható erők nagysága, valamint koordináta tengelyekkel bezárt szöge ismert.

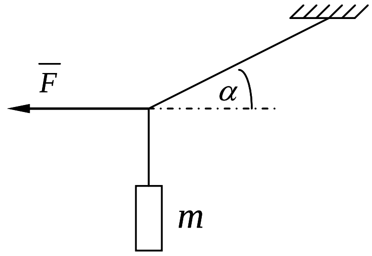
Adatok: $F_1 = 150[N]$, $F_2 = 230[N]$, $F_3 = 180[N]$, $\alpha_1 = 50°$, $\alpha_3 = 25°$




a) Adja meg az alábbi erőrendszer eredőjét koordinátáival oszlopvektoros formában!
b) Adja meg az eredő nagyságát és $x$ tengellyel bezárt hegyes szögét!
c) Szerkesztéssel is határozza meg az eredő erőt!

2.2* Az ábrán látható $m$ tömegű, pontszerű test nyugalomban van.

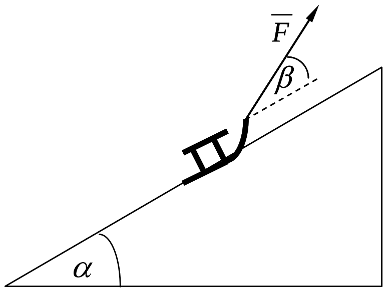
Adatok: $F = 150[N]$, $\alpha = 30°$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$




a) Rajzoljuk be a testre ható erőket!
b) Válasszunk egy célszerű koordinátarendszert, és írjuk fel benne a test egyensúlyi egyenleteit, majd határozzuk meg a kötélben ébredő erő nagyságát, valamint a test tömegét!
c) Szerkesszük meg a kötélerőt, valamint a testre ható gravitációs erőt!

2.3* Az ábrán látható szánkó a rá ható erők hatására a tökéletesen sima lejtőn ($\mu_0 = 0$) nyugalomban van.

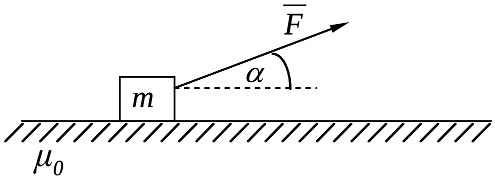
Adatok: $F = 200[N]$, $m = 21{,}41$[kg], $\alpha = 30^\circ$,$\beta = 20^\circ$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$




a) Rajzoljuk be a szánkóra ható erőket!
b) Válasszunk egy célszerű koordinátarendszert, majd írjuk fel benne a szánkó egyensúlyi egyenleteit! A kapott egyenletrendszerből határozzuk meg a lejtő által a szánkóra kifejtett kényszererő nagyságát, valamint annak lejtő síkjával bezárt szögét!
c) Szerkesztéssel is határozzuk meg a kényszererőt!

2.4* Az $m$ tömegű, pontszerű test a vízszintes talajon nyugalomban van. A talaj és a test között a tapadási súrlódási tényező $\mu_0$.

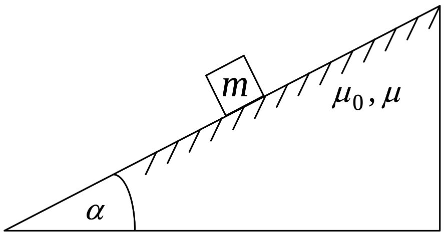
Adatok: $m = 10{,}19$[kg], $\mu_0 = 0{,}4$ , $\alpha = 30^\circ$,$g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$




Milyen $F_{min}$ és $F_{max}$ határok között változhat $F$ értéke a test egyensúlya esetén?

2.5* Egy érdes, $\alpha$ hajlásszögű lejtőn elhelyezünk egy pontszerű testet.

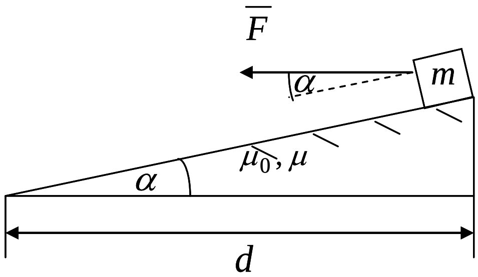
Adatok: $m = 500$[kg], $\alpha = 30^\circ$,$\mu_0 = 0{,}3$, $\mu = 0{,}1$ ,$\Delta t = 3[s]$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$




a) Nyugalomban marad-e a test a lejtőn?
b) Ha nem, akkor mekkora a test gyorsulása, és a talaj által kifejtett kényszererő nagysága a lecsúszás során?
c) Mekkora lesz a test sebessége $\Delta t$ idő elteltével?
d) Mekkora $\Delta s$ pályaszakaszt fut be a test a megadott $\Delta t$ idő alatt?

2.6* Egy érdes, $\alpha$ hajlásszögű lejtőn fekvő pontszerű testre állandó $\bar{F}$ erővel hatunk az ábra szerint.

Adatok: $m = 600$[kg], $\mu_0 = 0{,}3$, $\mu = 0{,}15$, $\alpha = 10^\circ$, $d = 50[m]$ ,$\Delta t = 3[s]$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$




a) Milyen $F_{min}$ és $F_{max}$ határok között változhat $F$ értéke a test egyensúlya esetén?
b) Ha $F = 6$[kN], akkor mekkora a test gyorsulása, és a talaj által kifejtett kényszererő nagysága a mozgás során?
c) Mennyi idő alatt ér le a test a lejtő tetejéről annak aljára a b) esetben, ha fentről nyugalomból indul?
d) Mekkora lesz a test sebessége a lejtő alján?

***Órai feladatok megoldásai***

2.1 Megoldás

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} -F \cdot \cos\alpha \\ F \cdot \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500\cos 40^\circ \\ 500\sin 40^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -383{,}02 \\ 321{,}39 \end{pmatrix} [N]$$

2.2 Megoldás

a) $\bar{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos\alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin\alpha_1 \end{pmatrix} [N]$,

$$\bar{F}_2 = \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin\alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos\alpha_2 \end{pmatrix} [N]$$

$$\bar{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} [N],$$

$$\bar{F}_4 = \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos\alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin\alpha_4 \end{pmatrix} [N]$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos\alpha_1 - F_2 \cdot \sin\alpha_2 + F_4 \cdot \cos\alpha_4 \\ F_1 \cdot \sin\alpha_1 + F_2 \cdot \cos\alpha_2 - F_3 - F_4 \cdot \sin\alpha_4 \end{pmatrix} =$$

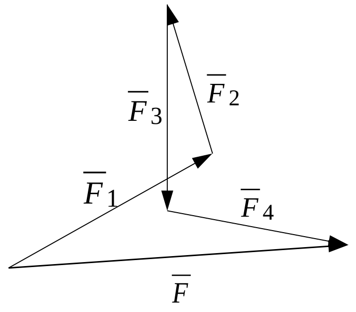
$$\begin{pmatrix} 150 \cdot \cos 30^\circ - 80 \cdot \sin 20^\circ + 100 \cdot \cos 15^\circ \\ 150 \cdot \sin 30^\circ + 80 \cdot \cos 20^\circ - 110 - 100 \cdot \sin 15^\circ \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}199{,}13\\14{,}29\end{pmatrix}[N]$$

b) $|\bar{F}| = \sqrt{F_{x^2} + F_{y^2}} = \sqrt{199,13^2 + 14,29^2} = 199{,}64[N]$

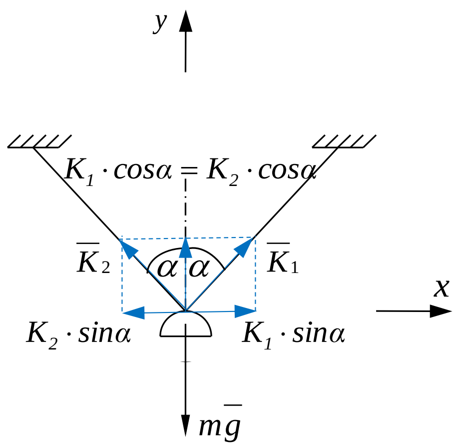
$$\mathrm{arctg}\left|\frac{F_y}{F_x}\right| = \mathrm{arctg}\left|\frac{14{,}29}{199{,}13}\right| = 4{,}105°$$

c)




2.3 Megoldás

a)

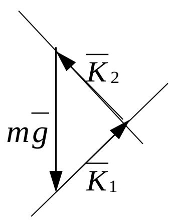



b) $\sum \bar{F}_i = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + m \cdot \bar{g} = \begin{pmatrix}K_1 \cdot \sin\alpha\\K_1 \cdot \cos\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-K_2 \cdot \sin\alpha\\K_2 \cdot \cos\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-\mathrm{mg}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

I. $K_1 \cdot \sin\alpha - K_2 \cdot \sin\alpha = 0 \rightarrow K_1 = K_2 = K$

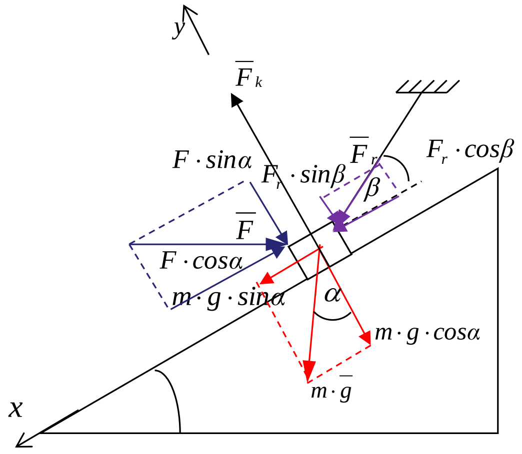
II. $K \cdot \cos\alpha + K \cdot \cos\alpha - \mathrm{mg} = 0$

III. $K \cdot \cos 40° + K \cdot \cos 40° - 15 \cdot 9{,}81 = 0 \Rightarrow K = 96{,}05[N]$



2.4 Megoldás

a)




b) $\sum \bar{F_i} = \bar{F} + m \cdot \bar{g} + \bar{F_r} + \bar{F_K} = \binom{0}{0} =$

$$\begin{pmatrix} -F \cdot \cos 30° \\ -F \cdot \sin 30° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mg \cdot sin30° \\ -mg \cdot cos30° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_r \cdot \cos 20° \\ -F_r \cdot \sin 20° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_K \end{pmatrix}$$

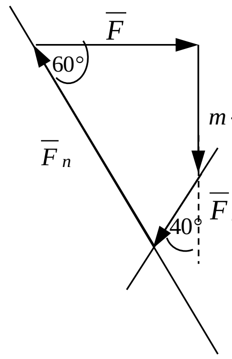
I. $0 = -200 \cdot \cos 30° + 17 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 30° + F_r \cdot \cos 20°$

$F_r = 95{,}85[N]$

II. $0 = -200 \cdot \sin 30° - 17 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 30° - 95{,}85 \cdot \sin 20° + F_K \Rightarrow$

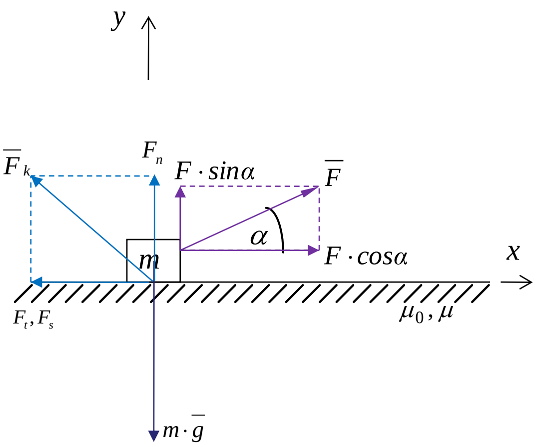
$F_K = 277{,}12[N]$

c)




2.5 Megoldás

a) Feltételezzük a test egyensúlyát, majd megvizsgáljuk, hogy az milyen $F$ értékek esetén áll fenn.




$$\sum\bar{F}_i = \bar{F} + \bar{F}_K + m\cdot\bar{g} = \bar{0} = \begin{pmatrix} F\cdot\cos\alpha \\ F\cdot\sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m\cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F\cdot cos15° \\ F\cdot sin15° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1000\cdot 9{,}81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $\quad F_t = \mathrm{F}\cdot\cos 15°$

$F_n = 1000\cdot 9{,}81 - \mathrm{F}\cdot\sin 15°$

A test egyensúlyban marad, akkor, és csakis akkor, ha $|F_t| \le \mu_0\cdot F_n$.

$-\mu_0\cdot F_n \le F_t \le \mu_0\cdot F_n$.

$I$. eset

$-\mu_0\cdot F_n \le F_t$

$-0{,}3\cdot(1000\cdot 9{,}81 - F\cdot sin15°) \le \mathrm{F}\cdot\cos 15°$

$-(2943 - 0{,}07764\cdot F) \le 0{,}9659\cdot F$

$-3313N \le F$

$II$. eset

$F_t \le \mu_0\cdot F_n$

$\mathrm{F}\cdot\cos 15° \le 0{,}3\cdot(1000\cdot 9{,}81 - F\cdot sin15°)$

$0{,}9659\cdot F \le 2943 - 0{,}07764\cdot F$

$F \le 2820N$

Tehát:

$-3313N \le F \le 2820N$

b) Felírjuk a test mozgásegyenletét.

$$\sum\bar{F}_i = \bar{F} + \bar{F}_K + m\cdot\bar{g} = m\cdot\bar{a}$$

$$\begin{pmatrix} F\cdot\cos\alpha \\ F\cdot\sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m\cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\cdot a \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $\quad F\cdot\cos\alpha - F_s = m\cdot a$

II. $\quad F\cdot\sin\alpha + F_n - m\cdot g = 0$

Továbbá a kényszererő komponensei között teljesül az alábbi összefüggés:

III. $\quad F_s = \mu\cdot F_n$

II. $\quad F_n = m\cdot g - F\cdot\sin\alpha$

I. $F \cdot \cos\alpha - \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \sin\alpha) = m \cdot a$

I. $a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha) - \mu \cdot g = 3{,}978 \left[\frac{m}{s^2}\right]$

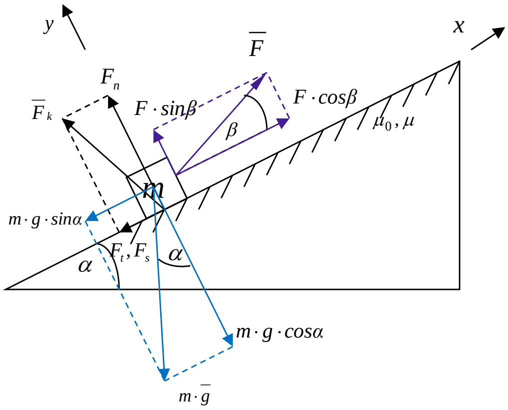
$F_k = \sqrt{F_{n^2} + F_{s^2}} = 8558{,}37[N]$

c) $v = v_0 + a\Delta t = 0 + 3{,}978 \cdot 10 = 39{,}78 \left[\frac{m}{s}\right]$

d) $\Delta s = s - s_0 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2 = 0 + 0 + \frac{3{,}978}{2} \cdot 10^2 = 198{,}9[m]$

2.6 Megoldás

a) Feltételezzük a test egyensúlyát.




$$\sum \overline{F}_i = \overline{F} + \overline{F}_K + m \cdot \overline{g} = \overline{0} = \begin{pmatrix} F \cdot \cos\beta \\ F \cdot \sin\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot cos10° \\ F \cdot sin10° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -500 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 15° \\ -500 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 15° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $F_t = \mathrm{F} \cdot \cos 10° - 500 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 15°$

II. $F_n = 500 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 15° - \mathrm{F} \cdot \sin 10°$

A test egyensúlyban marad, akkor, és csakis akkor, ha $|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$.

$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$.

$I.$ eset

$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$

$-0{,}35 \cdot (500 \cdot 9{,}81 \cdot cos15° - F \cdot sin10°) \leq \mathrm{F} \cdot \cos 10° - 500 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 15°$

$-0{,}35 \cdot (4737{,}9 - F \cdot 0{,}1736) \leq \mathrm{F} \cdot 0{,}9848 - 1269{,}5$

$-388{,}8 \leq \mathrm{F} \cdot 0{,}9240$

$-420{,}8N \leq \mathrm{F}$

$II.$ eset

$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$

$\mathrm{F} \cdot \cos 10° - 500 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 15° \leq 0{,}35 \cdot (500 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 15° - \mathrm{F} \cdot \sin 10°)$

$\mathrm{F} \cdot 0{,}9848 - 1269{,}5 \leq 388{,}8 - \mathrm{F} \cdot 0{,}06076$

$\mathrm{F} \leq 1586\mathrm{N}$

Tehát:

$-420{,}8\mathrm{N} \leq \mathrm{F} \leq 1586\mathrm{N}$

b) Felírjuk a test mozgásegyenletét.

$$\sum\bar{F}_i = \bar{F} + \bar{F}_K + m \cdot \bar{g} = m \cdot \bar{a}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos\beta \\ F \cdot \sin\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot a \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $F \cdot \cos\beta - F_s - m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a$

II. $F \cdot \sin\beta + F_n - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$

Továbbá a kényszererő komponensei között teljesül az alábbi összefüggés:

III. $F_s = \mu \cdot F_n$

II. $F_n = m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta$

I. $F \cdot \cos\beta - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta) - m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a$

I. $a = \frac{F}{m}(\cos\beta + \mu \cdot \sin\beta) - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha - g \cdot \sin\alpha = 6{,}54 \left[\frac{m}{s^2}\right]$

$F_k = \sqrt{F_{n^2} + F_{s^2}} = 3888{,}93[N]$

c) $v = v_0 + a \cdot \Delta t = 0 + 6{,}54 \cdot 3 = 19{,}63 \left[\frac{m}{s}\right]$

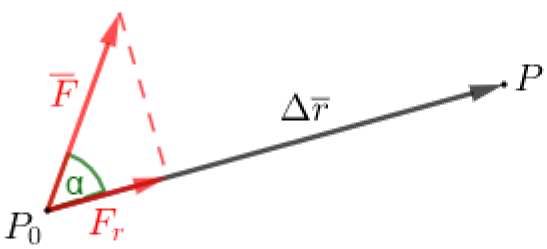
d) $\Delta s = s - s_0 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2 = 0 + 0 + \frac{6{,}54}{2} \cdot 3^2 = 29{,}43[m]$

### 3.1.2.2 Munka és energia

***Elméleti összefoglaló***

***A munka fogalma***

A munka fogalmát először abban az esetben értelmezzük, amikor az anyagi pontra ható erő állandó, azaz nem függ a helytől. Ekkor a munka definíció szerint az elmozdulás nagyságának és az erő elmozdulás irányú komponensének szorzata.




8. ábra

$$W_{\bar{F}}^{P_0 \to P} = F_r \cdot \Delta r = F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta r \qquad \textbf{(3.70)}$$

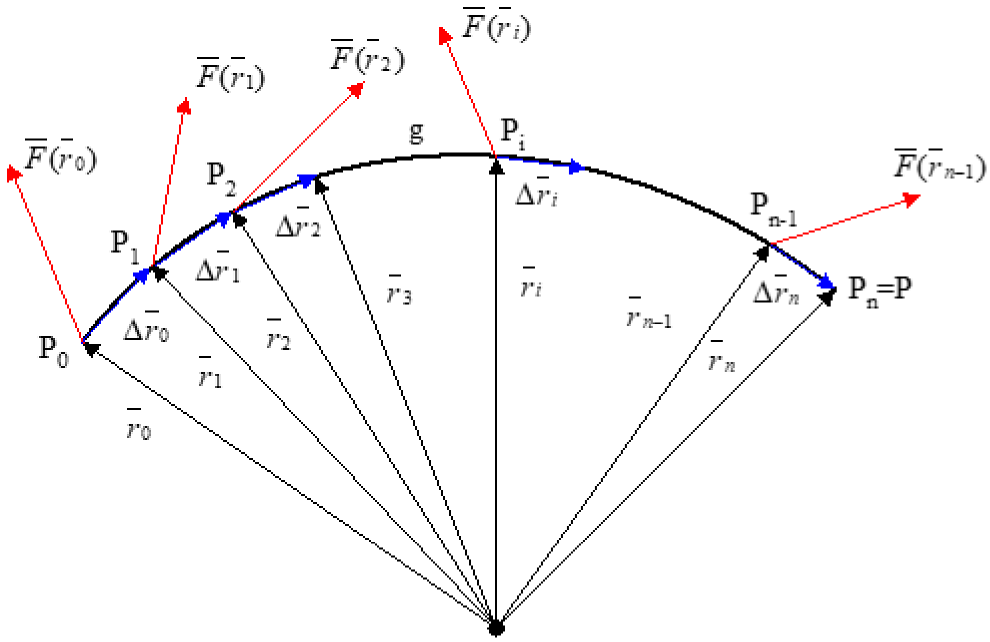
Az $F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta r$ mennyiséget az erő és elmozdulás skaláris szorzatának nevezzük és rá a tömör $\bar{F} \bullet \Delta\bar{r}$ jelölést alkalmazzuk. Tehát a munka:

$$W_{\bar{F}}^{P_0 \to P} = \bar{F} \bullet \Delta\bar{r} \qquad \textbf{(3.71)}$$

A munka előjele függ az $\alpha$ szög értékétől:

- Ha $0° \le \alpha < 90°$, akkor $\cos\alpha > 0$, így $W_{\bar{F}}^{P_0 \to P} > 0$.
- Ha $\alpha = 90°$, akkor $\cos\alpha = 0$, így $W_{\bar{F}}^{P_0 \to P} = 0$.
- Ha $90° \le \alpha < 180°$, akkor $\cos\alpha < 0$, így $W_{\bar{F}}^{P_0 \to P} < 0$.

A fentiekből adódóan, ha az erő merőleges az elmozdulásra, akkor nincs munkavégzés. Ha az erő nem állandó, akkor a pályát olyan apró szakaszokra bontjuk, amelyeken az erő már állandónak tekinthető. Ez egy közelítés, amely azonban annál pontosabb, minél aprólékosabb a felbontás. A szakaszok méretét zérusra csökkentve már pontos értéket kapunk.




9. ábra

Fontos megjegyezni, hogy a munka általában függ attól, hogy a $P_0$ és a $P$ pontok között milyen $g$ pályagörbén haladunk. A munkavégzést az alábbi összeggel közelíthetjük:

$$\boldsymbol{W_{\bar{F}}^{P_0 \to P} \approx \bar{F}(\bar{r}_0) \bullet \Delta\bar{r}_0 + \bar{F}(\bar{r}_1) \bullet \Delta\bar{r}_1 + \cdots + \bar{F}(\bar{r}_i) \bullet \Delta\bar{r}_i + \cdots \bar{F}(\bar{r}_{n-1}) \bullet \Delta\bar{r}_{n-1}} \qquad \textbf{(3.72)}$$

A „zérus” hosszúságú elmozdulásokat $\Delta\bar{r}$ helyett $d\bar{r}$ -rel jelölve:

$$\boldsymbol{W_{\bar{F}}^{P_0 \to P} = \bar{F}(\bar{r}_0) \bullet d\bar{r}_0 + \bar{F}(\bar{r}_1) \bullet d\bar{r}_1 + \cdots + \bar{F}(\bar{r}_i) \bullet d\bar{r}_i + \cdots \bar{F}(\bar{r}_{n-1}) \bullet d\bar{r}_{n-1}} \qquad \textbf{(3.73)}$$

A fenti „végtelen” összeget a matematikában az alábbi tömör formában használjuk:

$$\boldsymbol{W_{\bar{F},g}^{P_0 \to P} = \int_{P_0,g}^{P} \bar{F}(\bar{r}) \bullet d\bar{r}} \qquad \textbf{(3.74)}$$

Azaz a munka az $\bar{F}(\bar{r})$ függvény $P_0$-tól $P$ pontig vett g pályagörbe menti integrálja. Tehát a munkavégzés általános esetben az alábbi három tényezőtől függ:

- Az $\bar{F}(\bar{r})$ függvénytől.
- A $P_0$ és $P$ pontok megválasztásától.
- A $P_0$ és $P$ pontokat összekötő $g$ pályagörbe alakjától.

***Munkatétel***

Tekintsük először azt az esetet, amikor az anyagi pontra ható eredő erő állandó. Newton második törvénye szerint ekkor a gyorsulás is állandó, azaz érvényesek az alábbi összefüggések.

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}_0 + \bar{\boldsymbol{a}} \cdot \Delta \boldsymbol{t} \qquad \textbf{(3.75)}$$

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}_0 + \bar{\boldsymbol{v}}_0 \cdot \Delta \boldsymbol{t} + \frac{\bar{a}}{2} \cdot \Delta \boldsymbol{t}^2 \qquad \textbf{(3.76)}$$

A fenti összefüggésekből adódnak a következők.

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{\Delta t} \qquad \textbf{(3.77)}$$

$$\Delta \bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{v}}_0 \cdot \Delta \boldsymbol{t} + \frac{\bar{a}}{2} \cdot \Delta \boldsymbol{t}^2 = \bar{\boldsymbol{v}}_0 \cdot \Delta \boldsymbol{t} + \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{2 \cdot \Delta t} \cdot \Delta \boldsymbol{t}^2 = \frac{\bar{v} + \bar{v}_0}{2} \cdot \Delta \boldsymbol{t} \qquad \textbf{(3.78)}$$

Tehát a munka:

$$\boldsymbol{W}_{\bar{F}}^{P_0 \to P} = \bar{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{m} \cdot \bar{\boldsymbol{a}} \bullet \Delta \bar{r} =$$

$$= \boldsymbol{m} \cdot \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{\Delta t} \bullet \frac{\bar{v} + \bar{v}_0}{2} \cdot \Delta \boldsymbol{t} =$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{m} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} \bullet \bar{\boldsymbol{v}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{m} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_0 \bullet \bar{\boldsymbol{v}}_0 =$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{v}^2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{v}_0{}^2 \qquad \textbf{(3.79)}$$

Az $\frac{1}{2} m \cdot v^2$ mennyiséget mozgási energiának nevezzük, és $E_{mozg}$-gal jelöljük. Tehát azt kaptuk, hogy:

$$\boldsymbol{W}_{\bar{F}}^{P_0 \to P} = \boldsymbol{E}_{mozg}(\boldsymbol{P}) - \boldsymbol{E}_{mozg}(\boldsymbol{P}_0) = \Delta \boldsymbol{E}_{mozg} \qquad \textbf{(3.80)}$$

A fenti összefüggés a munkatétel, amelyet szavakkal megfogalmazva: Az eredő erő munkája megegyezik az anyagi pont mozgási energiájának megváltozásával. Az eredő erő munkája kiszámítható, mint az egyes erők munkáinak összege. Ez Newton negyedik törvényének alkalmazásával belátható az alábbiak szerint:

$$\boldsymbol{W}_{\bar{F}}^{P_0 \to P} = \bar{\boldsymbol{F}} \bullet \Delta \bar{\boldsymbol{r}} = (\bar{\boldsymbol{F}}_1 + \bar{\boldsymbol{F}}_2 + \cdots + \bar{\boldsymbol{F}}_i + \cdots) \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{F}}_1 \bullet \Delta \bar{\boldsymbol{r}} + \bar{\boldsymbol{F}}_2 \bullet \Delta \bar{\boldsymbol{r}} + \cdots + \bar{\boldsymbol{F}}_i \bullet \Delta \bar{\boldsymbol{r}} + \cdots =$$

$$= \boldsymbol{W}_{\bar{F}_1}^{P_0 \to P} + \boldsymbol{W}_{\bar{F}_2}^{P_0 \to P} + \cdots \boldsymbol{W}_{\bar{F}_i}^{P_0 \to P} + \cdots \qquad \textbf{(3.81)}$$

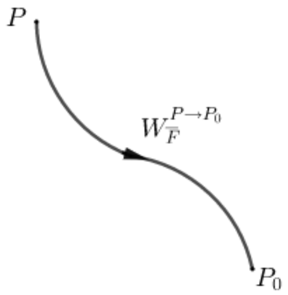
A munkatétel nem csak állandó, de változó erők esetén is teljesül. A munkatételt az egyes rövid pályaszakaszokara felírva és a munkákat összegezve ez könnyen belátható.

***A mechanikai energia-megmaradás tétele***

Helyzeti és mechanikai energia.

Vannak olyan esetek, amikor valamely erő munkavégzése független a $P_0$ és $P$ pontokat összekötő $g$ pályagörbe alakjától. Az ilyen erőket konzervatív erőknek nevezzük. Konzervatív erőkre példa a gravitációs, a rugó és a Coulomb erő. Azokat az erőket, amelyek nem konzervatívak disszipatív erőknek nevezzük. Disszipatív erőkre példa a súrlódási és a közegellenállási erő. Konzervatív erők esetén értelmezhető a helyzeti energia fogalma. Ehhez rögzítsük a tér egy $P_0$ pontját.

A $P$ pontban vett potenciális energia definíció szerint az a munka, amelyet az erő végez, mialatt az anyagi pontot a $P$-ből a $P_0$ pontba viszi.




10. ábra

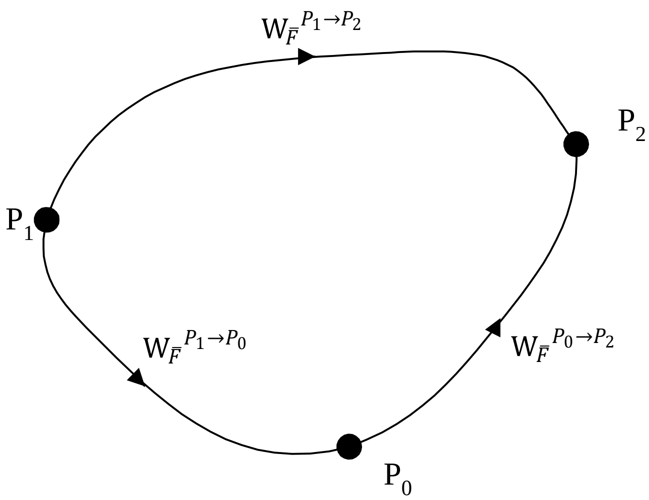
Matematikai jelölésekkel:

$$\boldsymbol{E_{pot}(P) = W_{\overline{F}}^{P_0\to P}} \qquad \textbf{(3.82)}$$

Írjuk fel a munkavégzést a $P_1$és $P_2$ pontok között, felhasználva, hogy a mező konzervatív.

$$\boldsymbol{W_{\overline{F}}^{P_1\to P_2} = W_{\overline{F}}^{P_1\to P_0} + W_{\overline{F}}^{P_0\to P_2} = W_{\overline{F}}^{P_1\to P_0} - W_{\overline{F}}^{P_2\to P_0} = E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2)} \qquad \textbf{(3.83)}$$

$$\boldsymbol{W_{\overline{F}}^{P_1\to P_2} = E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = E_{mozg}(P_2) - E_{mozg}(P_1)} \qquad \textbf{(3.84)}$$




11. ábra

Átrendezve a fenti egyenletet:

$$\boldsymbol{E_{pot}(P_1) + E_{mozg}(P_1) = E_{pot}(P_2) + E_{mozg}(P_2)} \qquad \textbf{(3.85)}$$

A mozgási és helyzeti energia összegét mechanikai energiának nevezzük. Tehát konzervatív erők esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\boldsymbol{E_{mech}(P_1) = E_{mech}(P_2) = \cdots = \text{á}llandó} \qquad \textbf{(3.86)}$$

Szavakkal megfogalmazva: Ha az anyagi pontra csak konzervatív erők hatnak, akkor annak mechanikai energiája állandó. A fenti törvény a mechanikai energia-megmaradás tétele.

Ha az anyagi pontra disszipatív erők is hatnak, akkor annak mechanikai energiája folyamatosan csökken. Azaz a disszipatív erők „felemésztik” a mechanikai energiát. A fentiek alapján a munkatételt felírhatjuk az alábbi alakban is:

$$\boldsymbol{W_{\overline{F},disszipatív}^{P_0\to P} = \Delta E_{mech}} \qquad \textbf{(3.87)}$$

Azaz a disszipatív erők együttes munkája egyenlő az anyagi pont mechanikai energiájának megváltozásával.

***Teljesítmény***

Az erő teljesítménye – definíció szerint – az erő munkavégzésének idő szerinti változási gyorsasága. Matematikai megfogalmazásban:

$$\boldsymbol{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}} \qquad \textbf{(3.88)}$$

Felhasználva, hogy a rövid időtartamú munkavégzés az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként számítható:

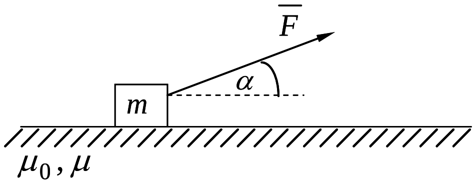
$$\boldsymbol{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{F} \bullet \Delta \overline{r}}{\Delta t} = \overline{F} \bullet \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t} = \overline{F} \bullet \overline{v}} \qquad \textbf{(3.89)}$$

Azaz az teljesítmény kiszámítható, mint az erő és az anyagi pont sebességének skaláris szorzata.

***Órai feladatok***

2.7 Egy vízszintes, érdes síkon nyugvó pontszerű testre állandó $\overline{F}$ erővel hatunk az ábra szerint.

Adatok: $F = 5[kN]$, $m = 1000[kg]$, $\mu_0 = 0{,}3$, $\mu = 0{,}1$, $\alpha = 15°$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$



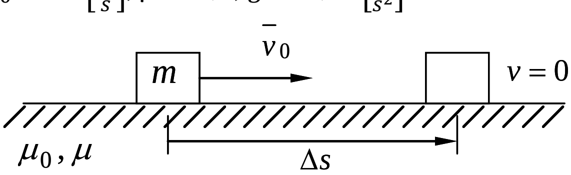

a) Elegendő-e a megadott erő nagysága a test megmozdításához?

b) Ha igen, akkor számítsuk ki az $\overline{F}$ erő, a talaj által kifejtett kényszererő, valamint a gravitációs erő munkavégzését mialatt a test megtesz 10 métert!

c) A munkatétel alkalmazásával számítsuk ki a test sebességének nagyságát a 20 méteres táv befutása után!

2.8 Egy pontszerű testet vízszintes, érdes síkon $v_0$ nagyságú, vízszintes irányú kezdősebességgel mozgásba hozunk.

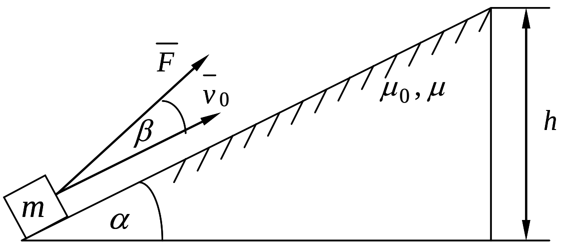
Adatok: $m = 300$[kg], $v_0 = 10 \left[\frac{m}{s}\right]$, $\mu = 0{,}1$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$




A munkatétel felhasználásával számítsa ki, hogy mekkora $\Delta s$ pályaszakasz befutása után áll meg a test!

2.9 Egy pontszerű test az ábrán vázolt érdes lejtőn végzi mozgását. A lejtő alsó pontjában a test sebességének nagysága $v_0$.

Adatok: $F = 5$[kN], $m = 500$[kg], $v_0 = 3 \left[\frac{m}{s}\right]$, $\mu = 0{,}1$, $g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$, $\alpha = 30°$, $\beta = 10°$, $h = 10$[m]

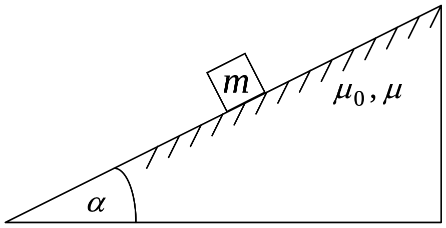



a) Mennyi munkát végez az $\bar{F}$ erő, a gravitációs erő, a talaj által kifejtett kényszererő külön-külön, és együttesen, mialatt a test a lejtő aljáról annak tetejére ér?
b) A munkatétel felhasználásával számítsa ki, hogy mekkora lesz a test sebessége a lejtő tetején!

***Otthoni feladatok***

2.7*Egy érdes, α hajlásszögű lejtőn elhelyezünk egy pontszerű testet.

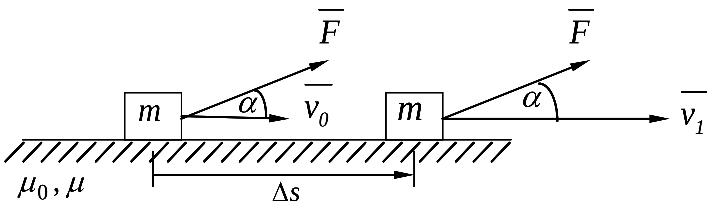
Adatok: $m = 500[kg]$, $\mu_0 = 0{,}3$, $\mu = 0{,}1$, $\alpha = 30°$, $g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right]$




a) Elmozdul-e a test a lejtőn?
b) Ha igen, mennyi munkát végez a talaj által kifejtett kényszererő valamint a gravitációs erő mialatt a test megtesz 20 métert!
c) A munkatétel alkalmazásával számítsuk ki a test sebességének nagyságát a 10 méteres táv befutása után!

2.8* Egy pontszerű test vízszintes, érdes síkon végzi mozgását. A test kezdeti és végsebességének $v_0$ és $v_1$ nagysága ismert.

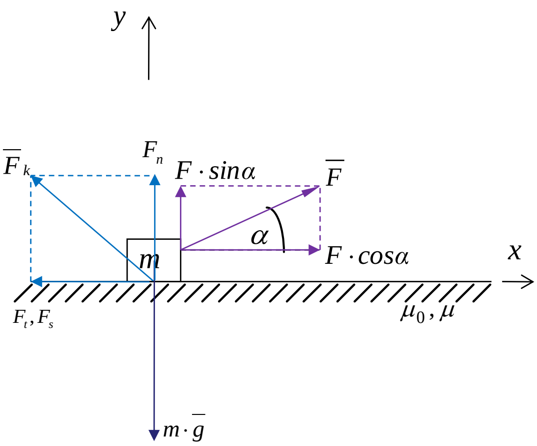
Adatok: $F = 5[kN], m = 1000[kg]$, $v_0 = 5\left[\frac{m}{s}\right]$, $v_1 = 15\left[\frac{m}{s}\right]$ $\mu = 0{,}1$, $\alpha = 15°$, $g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right]$




A munkatétel felhasználásával számítsa ki, hogy mekkora $\Delta s$ pályaszakaszt fut be a test!

***Órai feladatok megoldásai***

2.7 Megoldás




a) Feltételezzük a test egyensúlyát, majd megvizsgáljuk, hogy F mely értékei esetén áll az fenn?
Egyensúlyi egyenlet:

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F} + m \cdot \bar{q} + \bar{F}_k = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot cos\alpha \\ F \cdot sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $F \cdot cos\alpha - F_t = 0 \Rightarrow F_t = F \cdot cos\alpha$

II. $F \cdot sin\alpha - m \cdot g + \mathrm{F}_n = 0 \Rightarrow \mathrm{F}_n = m \cdot g - F \cdot sin\alpha$

A test egyensúlyban van akkor és csakis akkor, ha:

$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$

$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$

$-\mu_0 \cdot (m \cdot g - F \cdot sin\alpha) \leq F \cdot cos\alpha \leq \mu_0 \cdot (m \cdot g - F \cdot sin\alpha)$

$-\mu_0 \cdot m \cdot g + \mu_0 \cdot F \cdot sin\alpha \leq F \cdot cos\alpha \leq \mu_0 \cdot m \cdot g - \mu_0 \cdot F \cdot sin\alpha$

Az adatokat behelyettesítve:

$-0{,}3 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 + 0{,}3 \cdot F \cdot sin15° \leq F \cdot cos15° \leq 0{,}3 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 - 0{,}3 \cdot F \cdot sin15°$

$-2943 + 0{,}078 \cdot F \leq F \cdot 0{,}966 \leq 2943 - 0{,}078 \cdot F$

A fenti kettős egyenlőtlenség az alábbi két egyenlőtlenséget jelenti:

I.eset $-2943 + 0{,}078 \cdot F \leq F \cdot 0{,}966$

$-2943 \leq F \cdot 0{,}888$

$-3317[N] \leq F$

II.eset $F \cdot 0{,}966 \leq 2943 - 0{,}078 \cdot F$

$F \cdot 1{,}044 \leq 2943$

$F \leq 2819[N]$

Tehát a test egyensúlyban van, akkor és csakis akkor, ha

$-3317[N] \leq F \leq 2819[N]$

Tehát $F = 5[kN] = 5000[N]$ nagyságú erő esetén a test elmozdul.

b) $\mathrm{W}_F{}^{A\to B} = \bar{F} \bullet \Delta\bar{\mathrm{r}}_{AB} = \mathrm{F} \cdot \cos\alpha \cdot \Delta\mathrm{r}_{AB} = 5000 \cdot \cos 15° \cdot 10 = 48296[\mathrm{J}]$

$\mathrm{W}_{\bar{F}_k}{}^{A\to B} = \bar{F}_k \bullet \Delta\bar{\mathrm{r}}_{AB} = -\bar{F}_t \cdot \Delta\mathrm{r}_{AB} = -\mu \cdot \mathrm{F}_n \cdot \Delta\mathrm{r}_{AB} = -\mu \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \cdot \Delta\mathrm{r}_{AB} =$

$= -0{,}1 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 10 = -9810[\mathrm{J}]$

$\mathrm{W}_{m\cdot\bar{g}}{}^{A\to B} = 0 \cdot \Delta\mathrm{r}_{AB} = 0[J]$

c) Felírva a munkatételt az $AB$ szakaszra:

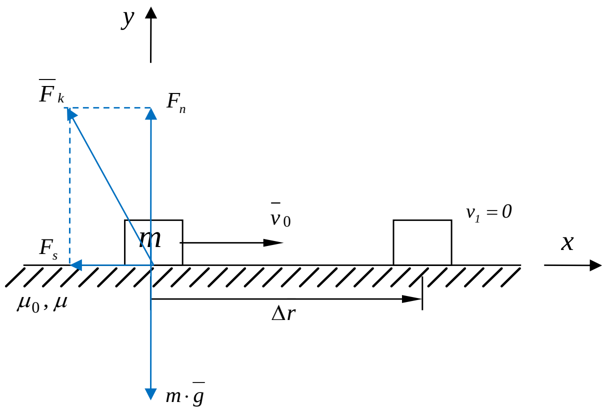
$$\sum_i \mathrm{W}_{\bar{F}_i}{}^{A\to B} = \mathrm{W}_{\bar{F}}{}^{A\to B} + \mathrm{W}_{m\cdot\bar{g}}{}^{A\to B} + \mathrm{W}_{\bar{F}_k}{}^{A\to B} = \frac{1}{2} m \cdot v_B{}^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A{}^2$$

$$48296 + 0 - 9810 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot v_B{}^2 - \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot v_A{}^2$$

$$38486 = 500 \cdot {v_B}^2$$

$$v_B = 8{,}773 \left[\frac{m}{s}\right]$$

2.8 Megoldás




Az egyes erők és a test elmozdulása koordinátákkal felírva:

$$m \cdot \bar{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix}, \bar{F}_K = \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix}, \Delta\bar{r} = \begin{pmatrix} \Delta r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a gravitációs és a kényszererő munkáját!

$$W_{m \cdot g} = m \cdot \bar{g} \cdot \Delta\bar{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta r \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \Delta r - m \cdot g \cdot 0 = 0[J]$$

$$W_{\mathrm{Fk}} = \bar{F}_K \cdot \Delta\bar{r} = \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta r \\ 0 \end{pmatrix} = -F_s \cdot \Delta r + F_n \cdot 0 = -\mu \cdot F_n \cdot \Delta r = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta r$$

Írjuk fel a munkatételt!

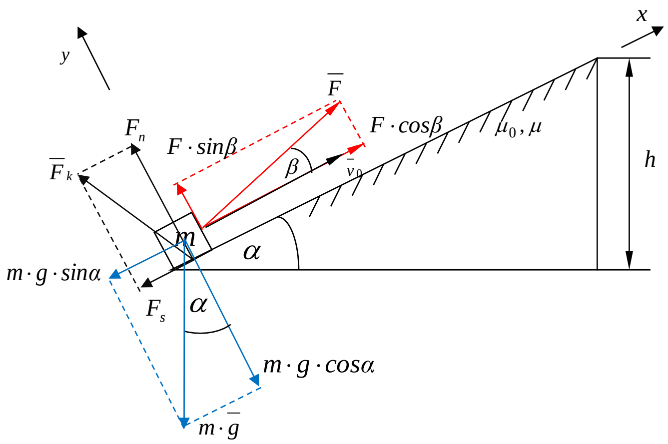
$$\sum_i W_i = W_{m \cdot g} + W_{\mathrm{Fk}} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta r = \frac{1}{2} m \cdot {v_1}^2 - \frac{1}{2} m \cdot {v_0}^2$$

Tehát:

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta s = -\frac{1}{2} m \cdot {v_0}^2$$

$$\Delta r = \frac{{v_0}^2}{2 \cdot \mu \cdot g} 50{,}97[m]$$

2.9 Megoldás



a) Az egyes erők és a test elmozdulása koordinátákkal felírva:

$$m \cdot \bar{g} = \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}, \bar{F}_K = \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix}, \Delta\bar{r} = \begin{pmatrix} \Delta s \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{F} = \begin{pmatrix} F \cdot \cos\beta \\ F \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$$

Ahol $\Delta s = \frac{h}{\sin\alpha} = 20[m]$.

Írjuk fel az erő, a gravitációs és a kényszererő munkáját!

$$W_F = \bar{F} \bullet \Delta\bar{r} = \begin{pmatrix} F \cdot \cos\alpha \\ F \cdot \sin\alpha \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \Delta s \\ 0 \end{pmatrix} = F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s + F \cdot \sin\alpha \cdot 0 = F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s$$

$$W_{m \cdot g} = m \cdot \bar{g} \bullet \Delta\bar{r} = \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta s \\ 0 \end{pmatrix} = -m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \Delta s - m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot 0 =$$
$$= -m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \Delta s$$

$$W_{\mathrm{Fk}} = \bar{F}_K \bullet \Delta\bar{r} = \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \Delta s \\ 0 \end{pmatrix} = -F_s \cdot \Delta s + F_n \cdot 0 = -\mu \cdot F_n \cdot \Delta s$$
$$= -\mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta) \cdot \Delta s$$

Írjuk fel a munkatételt!

$$\sum_i W_i = W_F + W_{m \cdot g} + W_{\mathrm{Fk}} =$$

$$= F \cdot \cos\alpha \cdot \Delta s - m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \Delta s - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta) \cdot \Delta s = \frac{1}{2} m \cdot {v_1}^2 - \frac{1}{2} m \cdot {v_0}^2$$

Tehát:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot [F \cdot \cos\beta \cdot \Delta s - m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \Delta s - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta) \cdot \Delta s] + m \cdot {v_0}^2}{m}}$$
$$= 13{,}405 \left[\frac{m}{s}\right]$$