Matematika alap-, közép- és emelt szinten

(Készüljünk a felvételire a „mindennapok” matematikájával)

A tananyag elkészítésétaz MTMI szakokra való bekerülést elősegítő innovatív programok megvalósítása a Debreceni Egyetem vonzáskörzetében EFOP-3.4.4-16-2017-00023 projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Szerzők:
Dr. Szanyi Gyöngyi
Dr. Kézi Csaba Gábor

Lektor:
Dr. Nagy Gergő

Kézirat lezárva: 2018. június 30.

ISBN 978-963-490-015-3

Kiadja: Debreceni Egyetem

TARTALOMJEGYZÉK

1 ALGEBRAI ALAPISMERETEK

Elméleti összefoglaló:

Legyenek a és b valós számok, továbbá és n és m pozitív egész számok.

a) A hatványozás definíciója és azonosságai:

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,$ ahol a tényezők száma: n	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
$a^0 = 1$	$5^0 = 1$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 5)^6 = 3^6 \cdot 5^6$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{3^6}{5^6}$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^6 \cdot 2^4 = 2^{6+4} = 2^{10} = 1\,024$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^2 = 2^6 = 64$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Elnevezések: Az a^n kifejezésben az a valós számot *hatványalap*nak hívjuk. Az n természetes számot *hatványkitevő*nek nevezzük, míg az a^n kifejezést *hatvány*ként vagy *hatványérték*ként említjük. Például a 2^3 kifejezésben a hatványalap: 2, a hatványkitevő: 3, a hatványérték: $2^3 = 8$.

Fontos megjegyezni, hogy különböző alapú, különböző kitevőjű hatványok szorzására, osztására nincs a fentiekhez hasonló azonosság.

Megjegyezzük továbbá, hogy a hatványkitevő lehet egész szám, racionális szám, sőt valós szám is. Ebben a jegyzetben azzal az esettel nem foglalkozunk, amikor a kitevő valós szám.

A 0^0 hatvány értékét definíció szerint $1 -$nek fogjuk tekinteni. Ennek indoklása túlmutat ezen jegyzet témakörein.

b) A gyökvonás definíciója és azonosságai:

$\sqrt[n]{a}$ azt a számot jelenti, amelynek $n-$ edik hatványa az a szám.	$\sqrt[3]{27}=3$, mert $3^3=27$
$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{8\cdot 27}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=2\cdot 3=6$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{2}=1{,}5$
$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$
$\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[3]{8^5}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^5=2^5=32$

Elnevezések: Az $\sqrt[n]{a}$ kifejezésben az n –et *gyökkitevő*nek nevezzük.

Fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben a gyökkitevő páros, úgy $\sqrt[n]{a}$ azt a **pozitív** számot jelenti, amelynek az $n-$ edik hatványa az a szám.

c) A logaritmus definíciója és azonosságai:

A $\log_a x$ azt a számot (kitevőt) jelenti, amelyre a-t emelve eredményül x –et kapunk. Ez azt is jelenti, hogy $\log_a x=b$ pontosan akkor teljesül, ha $a^b=x$, azaz $\log_a x$ azt jelenti, hogy az a számnak hanyadik hatványa az x.	$\log_2 8=3$, mert$2^{\log_2 8}=$ 3,másképpen indokolva $\log_2 8=3$, mert $2^3=8$
$\log_{\mathrm{a}} x+\log_a y=\log_{\mathrm{a}}(x\cdot y)$	$\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\cdot 3)=1$
$\log_{\mathrm{a}} x-\log_a y=\log_{\mathrm{a}}\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_3 6-\log_3 2=\log_3\frac{6}{2}=1$
$\log_a x^n=n\cdot\log_a x$	$\log_3 3^{10}=10\cdot\log_3 3=1$
$\log_a x=\frac{\log_{\mathrm{b}} x}{\log_{\mathrm{b}} a}$	$\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}=\frac{3}{2}=1{,}5$

A logaritmus definíciója miatt a fenti összefüggésekben $a>0, a\neq 1, x>0, y>0$.

d) Nevezetes azonosságok:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(2+x)^2 = 4 + 4x + x^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2-x)^2 = 4 - 4x + x^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$	$9 - x^2 = (3-x)\cdot(3+x)$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$(3-x-y)^2 = 9 + x^2 + y^2 - 6x - 6x + 2xy$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(2+x)^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(2-x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$
$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$	$8 - x^3 = (2-x)\cdot(4 + 2x + x^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$	$8 + x^3 = (2+x)\cdot(4 - 2x + x^2)$

1. feladat: Adjuk meg a $2+\frac{3}{4}$ szám reciprokát!

Megoldás:

Mivel

$$2+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=\frac{11}{4},$$

ezért a keresett szám reciproka: $\frac{4}{11}$.

2. feladat: Határozzuk meg a

$$\frac{3^{-1}+3^{-2}}{3^{-3}+3^{-3}}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $3^{-n}=\frac{1}{3^n}$, ezért

$$\frac{3^{-1}+3^{-2}}{3^{-3}+3^{-4}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}+\frac{1}{81}}.$$

Az emeletes tört számlálójában és nevezőjében is közös nevezőre hozva, majd felhasználva, hogy törtet törttel úgy osztunk, hogy szorzunk az osztó reciprokával, azt kapjuk, hogy

$$\frac{3^{-1}+3^{-2}}{3^{-3}+3^{-4}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}+\frac{1}{81}}=\frac{\frac{3+1}{9}}{\frac{3+1}{81}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{81}{4}=9.$$

3. feladat: Számoljuk ki a

$$\frac{-3^2+(-3)^2+1}{-2^{-2}+3^{-2}}$$

kifejezés pontos értékét!

<u>Megoldás:</u>

Mivel $-3^2=-9$, és $(-3)^2=9$, továbbá $-2^{-2}=-\frac{1}{4}$, és $3^{-2}=\frac{1}{9}$, ezért

$$\frac{-3^2+(-3)^2+1}{-2^{-2}+3^{-2}}=\frac{-9+9+1}{-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{1}{-\frac{5}{36}}=-\frac{36}{5}.$$

4. feladat: Adjuk meg az A, B és C valós számok értékét úgy, hogy

$$(x+2)^2-4\cdot(2x-4)-2\cdot(x-1)\cdot(x+1)=A\cdot x^2+B\cdot x+C$$

teljesüljön!

<u>Megoldás:</u>

Mivel $(x+2)^2=x^2+4x+4$ és $(x-1)\cdot(x+1)=x^2-1$, ezért

$$x^2+4x+4-4\cdot(2x-4)-2\cdot(x^2-1)=A\cdot x^2+B\cdot x+C.$$

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x^2+4x+4-8x+16-2\cdot x^2+2=A\cdot x^2+B\cdot x+C.$$

Az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$-x^2-4x+22=A\cdot x^2+B\cdot x+C.$$

Tehát $A=-1, B=-4, C=22$.

5. feladat: Határozzuk meg az x valós szám értékét úgy, hogy

$$\frac{a^3 \cdot a^5 \cdot (a^2)^3}{(a^2)^2} = a^x$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel hatvány hatványozásakor a kitevők összeszorzódnak, ezért: $(a^2)^3 = a^6$ és $(a^2)^2 = a^4$, ezért

$$\frac{a^3 \cdot a^5 \cdot a^6}{a^4} = a^x.$$

Azonos alapú hatványok szorzásakor az alapot a kitevők összegére emeljük, így

$$\frac{a^{14}}{a^4} = a^x.$$

Azonos alapú hatványok osztásakor az alapot a kitevők különbségére emeljük, így

$$a^{10} = a^x,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = 10$.

6. feladat: Határozzuk meg az x és az y valós számok értékét úgy, hogy

$$\frac{(a^2 \cdot b)^5 \cdot a^5 \cdot b^6 \cdot (a^4)^3}{(a^3)^2 \cdot (a \cdot b^4)^2} = a^x \cdot b^y.$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel szorzatot tényezőnként hatványozunk és hatvány hatványozásakor a kitevők összeszorzódnak, ezért egyrészt

$(a^2 \cdot b)^5 = (a^2)^5 \cdot b^5 = a^{10} \cdot b^5$ és

$(a \cdot b^4)^2 = a^2 \cdot (b^4)^2 = a^2 \cdot b^8$, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{a^{10} \cdot b^5 \cdot a^5 \cdot b^6 \cdot a^{12}}{a^6 \cdot a^4 \cdot b^8} = a^x \cdot b^y.$$

Azonos alapú hatványok szorzásakor az alapot a kitevők összegére emeljük, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{a^{27} \cdot b^{11}}{a^{10} \cdot b^{8}} = a^{x} \cdot b^{y}.$$

Azonos alapú hatványok osztásakor az alapot a kitevők különbségére emeljük, így

$$a^{17} \cdot b^{3} = a^{x} \cdot b^{y}.$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = 17$, illetve $y = 3$.

7. feladat: Adjuk meg az A és B valós számok értékét úgy, hogy teljesüljön a

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x-1)}$$

összefüggés.

Megoldás:

A bal oldal közös nevezője $x \cdot (x-1)$, így

$$\frac{2 \cdot (x-1) + 3 \cdot x}{x \cdot (x-1)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x-1)}.$$

A bal oldalon a zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\frac{2x - 2 + 3x}{x \cdot (x-1)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x-1)}.$$

Az egynemű kifejezéseket összevonva

$$\frac{5x - 2}{x \cdot (x-1)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x-1)}$$

adódik. Tehát azt kapjuk, hogy $A = 5$, illetve $B = -2$.

8. feladat: Egyszerűsítsük az

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel $x^2 - 4 = (x-2) \cdot (x+2)$, ezért

SZÉCHENYI 2020

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}=x+2.$$

9. feladat: Egyszerűsítsük az

$$\frac{x^2-6x+9}{2x^2-18}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel $x^2-6x+9=(x-3)^2$ és

$2x^2-18=2\cdot(x^2-9)=2\cdot(x-3)\cdot(x+3)$, ezért

$$\frac{x^2-6x+9}{2x^2-18}=\frac{(x-3)^2}{2\cdot(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{x-3}{2\cdot(x+3)}=\frac{x-2}{2x+6}.$$

10. feladat: Egyszerűsítsük az

$$\frac{x^2-9x}{x^2-81}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel $x^2-9x=x\cdot(x-9)$ és $x^2-81=(x-9)\cdot(x+9)$, ezért

$$\frac{x^2-9x}{x^2-81}=\frac{x\cdot(x-9)}{(x-9)\cdot(x+9)}=\frac{x}{x+9}.$$

11. feladat: Egyszerűsítsük az

$$\frac{x^3-27}{x^2-9}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)\cdot(x^2+3x+9)$ és $x^2-9=(x-3)\cdot(x+3)$, ezért

$$\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{(x-3)\cdot(x^2+3x+9)}{(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{x^2+3x+9}{x+3}.$$

12. feladat: Egyszerűsítsük az

$$\frac{x+7}{x^2+7x}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel $x^2+7x=x\cdot(x+7)$, ezért

$$\frac{x+7}{x^2+7x}=\frac{x+7}{x\cdot(x+7)}=\frac{1}{x}$$

13. feladat: Egyszerűsítsük az

$$\frac{x^2-5x}{x^2+3x}:\frac{x^2-25}{x^2-9}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel egyrészt $x^2-5x=x\cdot(x-5)$, másrészt $x^2+3x=x\cdot(x+3)$, továbbá $x^2-25=(x-5)\cdot(x+5)$ és $x^2-9=(x-3)\cdot(x+3)$, ezért

$$\frac{x^2-5x}{x^2+3x}:\frac{x^2-25}{x^2-9}=\frac{x\cdot(x-5)}{x\cdot(x+3)}:\frac{(x-5)\cdot(x+5)}{(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{(x-5)}{(x+3)}:\frac{(x-5)\cdot(x+5)}{(x-3)\cdot(x+3)}.$$

Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorzunk, ezért

$$\frac{x^2-5x}{x^2+3x}:\frac{x^2-25}{x^2-9}=\frac{(x-5)}{(x+3)}\cdot\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{(x-5)\cdot(x+5)}=\frac{x-3}{x+5}.$$

14. feladat: Egyszerűsítsük az

$$\frac{ax+bx-ay-by}{2x-2y}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel

$$ax + bx - ay - by = x \cdot (a + b) - y \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (x - y)$$

és

$$2x - 2y = 2 \cdot (x - y),$$

ezért

$$\frac{ax + bx - ay - by}{2x - 2y} = \frac{(a + b) \cdot (x - y)}{2 \cdot (x - y)} = \frac{a + b}{2}.$$

15. feladat: Számoljuk ki a

$$\frac{10\,000 \cdot 10\,004 - 10\,002 \cdot 9\,998}{10\,000 \cdot 10\,001 - 10\,001 \cdot 9\,999}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Vezessük be az $x = 10\,000$ jelölést. Ekkor a kifejezés átírható az alábbi alakra:

$$\frac{x \cdot (x + 4) - (x + 2) \cdot (x - 2)}{x \cdot (x + 1) - (x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x^2 + 4x - x^2 + 4}{x^2 + x - x^2 + 1} = \frac{4x + 4}{x + 1} = \frac{4 \cdot (x + 1)}{x + 1} = 4.$$

16. feladat: Legyen $A = \log_2 8$ és $B = \log_3 \frac{1}{9}$. Adjuk meg az $A^2 + 2B^2$ pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $\log_2 8$ azt a számot jelenti, hogy a 2 számnak hanyadik hatványa a 8, ezért

$$A = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

Hasonlóan:

$$B = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2.$$

Tehát:

$$A^2 + 2B^2 = 3^2 + 2 \cdot (-2)^2 = 9 + 8 = 17.$$

17. feladat: Számoljuk ki a

$$\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 27 + \log_5 \frac{1}{25}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$ és $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$, továbbá $\log_5 \frac{1}{25} = -2$,

ezért

$$\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 27 + \log_5 \frac{1}{25} = -2 + 3 + (-2) = -1.$$

18. feladat: Határozzuk meg A és B valós számokat úgy, hogy

$$\left(\sqrt{2} + 3\right)^2 = A + B \cdot \sqrt{2}$$

teljesüljön!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

azt kapjuk, hogy

$$\left(\sqrt{2} + 3\right)^2 = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 = 11 + 6 \cdot \sqrt{2},$$

így $A = 11$, illetve $B = 6$.

19. feladat: Határozzuk meg A és B valós számokat úgy, hogy

$$\left(\sqrt{5} - 2\right)^3 = A + B \cdot \sqrt{5}$$

teljesüljön!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

azt kapjuk, hogy

$$\left(\sqrt{5}-2\right)^3 = \sqrt{125} - 3\cdot 5\cdot 2 + 3\cdot\sqrt{5}\cdot 4 - 8$$
$$= \sqrt{125} + 12\cdot\sqrt{5} - 38.$$

Mivel $\sqrt{125} = \sqrt{25\cdot 5} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{5} = 5\cdot\sqrt{5}$, ezért

$$\left(\sqrt{5}-2\right)^3 = \sqrt{125} + 12\cdot\sqrt{5} - 38 = 5\cdot\sqrt{5} + 12\cdot\sqrt{5} - 38 = 17\cdot\sqrt{5} - 38$$
$$= -38 + 17\sqrt{5},$$

így azt kapjuk, hogy $A = -38$, illetve $B = 17$.

20. feladat: Adjunk meg olyan a és b valós számokat, amelyre $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Megoldás:

Legyen $a = 2$ és $b = 3$. Ekkor

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25,$$

ugyanakkor

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13,$$

így

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

21. feladat: Adjunk meg olyan a és b valós számokat, amelyre $(a+b)^3 \neq a^3 + b^3$.

Megoldás:

Legyen $a = 2$ és $b = 3$. Ekkor

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^3 = (2+3)^3 = 5^3 = 125,$$

ugyanakkor

$$a^3 + b^3 = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35,$$

így

$$(a+b)^3 \neq a^3 + b^3.$$

22. feladat: Adjunk meg olyan a és b valós számokat, amelyre

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Megoldás:

Legyen $a = 4$ és $b = 9$. Ekkor

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$

ugyanakkor

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5,$$

így

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

23. feladat: Egy $5\,000$ forintos farmer árát 20% $-$kal felemelik, majd az emelt árat 20% $-$kal csökkentik. Mennyibe kerül most a farmer? Hány % $-$os volt az árváltozás?

Megoldás:

Az $5\,000$ forintnak az 1% $-$a: $\frac{5\,000}{100}=50$ forint, a 20% $-$a: $50\cdot 20=1\,000$ forint. Tehát az áremelés után $5\,000+1\,000=6\,000$ forintba került a farmer.

A $6\,000$ forintnak az 1% $-$a: $\frac{6\,000}{100}=60$ forint, a 20% $-$a: $60\cdot 20=1\,200$ forint.

Tehát most a farmer: $6\,000-1\,200=4\,800$ forintba kerül a farmer.

Az árváltozás 200 forint volt, ami $\frac{200}{5\,000}\cdot 100=4\%$ $-$os változást jelent.

24. feladat: A tej tömegének $7{,}3\%$ $-$a tejszín. A tejszín tömegének 62% $-$a vaj. Hány kg tejből készíthető 5 kg vaj?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy x kg tejből készíthető 5 kg vaj. Ekkor

$$x\cdot 0{,}073\cdot 0{,}62=5,$$

így $0{,}04526x=5$, tehát $x=110{,}5$, ami azt jelenti, hogy $110{,}5$ kg tömegű tejből készíthető 5 kg vaj.

25. feladat: A h hosszúságú fonálinga lengési ideje:

$$t=2\pi\cdot\sqrt{h\cdot g^{-1}},$$

ahol g gravitációs gyorsulás értéke. Fejezzük ki a képletből a h mennyiséget! Számoljuk ki a h pontos értékét, ha $g=10\left[\frac{m}{s^2}\right]$ és $t=20$ [s]. Adjuk meg a választ két tizedesjegyre kerekítve is! Adjunk szöveges választ!

Megoldás:

A h mennyiség kifejezéséhez első lépésben a megadott egyenlet mindkét oldalát osszuk el 2π-vel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{t}{2\pi} = \sqrt{h \cdot g^{-1}}.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát emeljük négyzetre:

$$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 = h \cdot g^{-1}.$$

Mivel $g^{-1} = \frac{1}{g^1} = \frac{1}{g}$, ezért

$$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 = h \cdot \frac{1}{g}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk g –vel:

$$h = g \cdot \left(\frac{t}{2\pi}\right)^2.$$

Ha $t = 20$ és $g = 10$, akkor

$$h = 10 \cdot \left(\frac{20}{2\pi}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 = \frac{1000}{\pi} \approx 318{,}31[m].$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha a fonálinga lengési ideje 20 másodperc, akkor a hosszúsága 318,31 méter.

Gyakorló feladatok

1. feladat: Mivel egyenlő $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, ha $x + \frac{1}{x} = 14$?

2. feladat: Adjuk meg az A és B valós számok értékét, ha

$$\sqrt{72} + \sqrt{32} + \sqrt{16} + \sqrt{50} = A + B \cdot \sqrt{2}.$$

3. feladat: Egyszerűsítsük az

$$\frac{x^2 - 10x}{x^2 - 100} \cdot \frac{x^2 + 10x}{x}$$

algebrai törtet!

2 FÜGGVÉNYEK

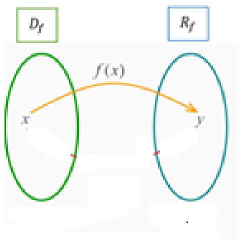
<u>Elméleti összefoglaló:</u>

Legyen adott A es B két nem üres, tetszőleges halmaz! Ha az A halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a B halmaz pontosan egy (egy és csak egy) elemét, akkor az A halmazon ***függvény***t adtunk meg, melynek értékei a B halmazhoz tartoznak (röviden: az egyértelmű hozzárendelés függvényt ad meg).

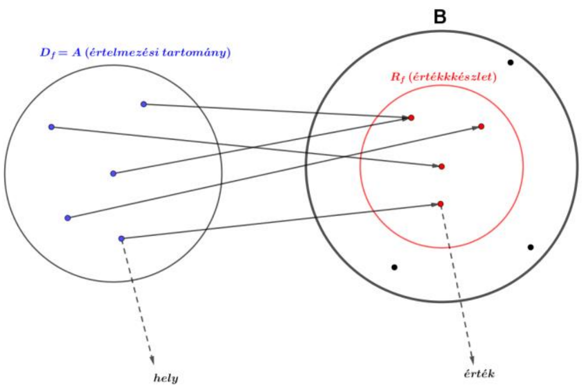
Jelölés: $f: A \to B$

Az A halmazt a függvény *értelmezési tartományának* nevezzük, melyet D_f-el jelöljük. Az értelmezési tartomány elemei a független változó (argumentum) (például x) azon értékei, melyekre a függvény értéke (például$f(x)$) meghatározható.

A B halmaz (képhalmaz) azon (nem feltétlenül valódi) részhalmaza, amelyeket az A-beli elemekhez rendeltünk, a *függvény értékkészlete*, melynek jelölése R_f. Azaz



Egy függvény az értelmezési tartományának minden eleméhez **pontosan egy (!)** *elemet rendel hozzá az értékkészletének elemei közül.*



<u>*Példa:*</u> A négyszögekhez hozzárendeljük a területüket.

A megadott hozzárendelés egy függvényt határoz meg, mely esetében D_f - *négyszögek;* R_f - *valós számok.*

Az értelmezési tartomány elemeit szokás *helyeknek*, az értékkészlet elemeit pedig *értékeknek* nevezni.

Ha $f(x) = y$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x elemhez az y elemet rendeli hozzá, vagy azt, hogy az x helyen az f függvény értéke y.

$f(x)$ –az f függvény x helyen felvett helyettesítési értéke.

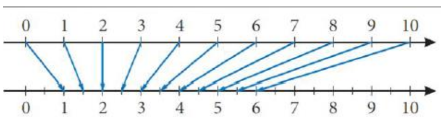
<u>*Példa:*</u> Adjuk meg az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2x$ függvény helyettesítési értékét az $x = -2$ helyen!

Megoldás: A helyettesítési érték $f(-2) = -(-2)^2 + 2 \cdot (-2) = -4 - 4 = -8$.

A függvény megadása az értelmezési tartomány és a hozzárendelési szabály megadását jelenti. E kettő pedig már tulajdonképpen meghatározza az értékkészletet is.

A függvények reprezentációs módjai:

- szövegesen
- nyíldiagrammal
- táblázattal
- rendezett elempárok felsorolásával
- számegyenesekkel:



- grafikonnal
- képlettel: $x \to 2x + 1, f(x) = 2x + 1,\ y = 2x + 1$

A függvény grafikonja:

Az $f: A \to \mathbb{R}$ valós függvény grafikonján, ahol A a valós számok halmazának egy (nem feltétlenül valódi) részhalmaza, azon $(x; y)$ síkbeli pontok halmazát értjük, melyek esetén $x \in A,\ y = f(x)$.

<u>*Példa:*</u> *Ábrázoljuk az* $x \to 0{,}5^x$ *függvényt a* $[-2; 2]$ *intervallumon!*

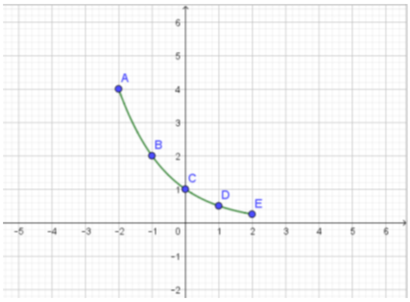
Megoldás: Készítsük el a függvény értéktáblázatát. Vagyis keressük meg a függvény néhány értékét

x (*hely*)	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$ (*érték*)	$(0{,}5^{-2} =)4$	$(0{,}5^{-1} =)\ 2$	1	$0{,}5$	$0{,}25$

A derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk a következő pontokat:

$$A(-2;4),\qquad B(-1;2),\qquad C(0;1),\qquad D(1;0{,}5),\qquad E\ (2;0{,}25)$$

Exponenciális függvény lévén a megadott függvény grafikonja a következő:



A matematikai tanulmányok minden területén központi szerephez jutnak függvények. A gyakorlatban általában olyan függvényekkel foglalkozunk, melyek megadhatók képlettel. (De természetesen nem minden függvényt adhatunk meg képlettel, például „minden emberhez hozzárendeljük az édesanyját” függvényt nem tudunk képlettel leírni.) A képlet azt mutatja meg, hogy az értelmezési tartománybeli x elemhez („bemenő adat”) a függvény mely elemet rendeli az értékkészletből („kimenő adat”). Ilyenkor azt is meg kell mondani, hogy melyik halmaz az értelmezési tartomány.

A problémák megoldásához ismernünk kell a legfontosabb, ún. elemi függvényeket, és azt, hogy ezek a függvények milyen tulajdonságokkal rendelkeznek.

A továbbiakban összefoglaljuk az egyváltozós valós függvények jellemzéséhez szükséges ismereteket, majd a legfontosabb függvénytranszformációkat.

<table>
<tr><th colspan="2">Egyváltozós valós függvények tulajdonságai</th></tr>
<tr>
<td>

Monotonitás

Az f függvényt az $I \subseteq D_f$ intervallumon

a) szigorúan monoton növekvőnek

b) szigorúan monoton csökkenőnek

mondjuk, ha $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén

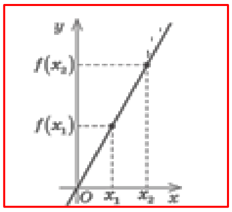
$a)$ $f(x_1) < f(x_2)$

$b)$ $f(x_1) > f(x_2)$

</td>
<td>

Szigorúan monoton növekvő függvény

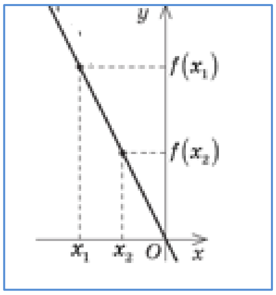
(például: $x \to 2x$)



(nagyobb argumentumhoz nagyobb függvényérték tartozik)

Szigorúan monoton csökkenő függvény

(például: $x \to -2x$)



(nagyobb argumentumhoz kisebb függvényérték tartozik)

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Az f függvényt az $I \subseteq D_f$ intervallumon

a) monoton növekvőnek

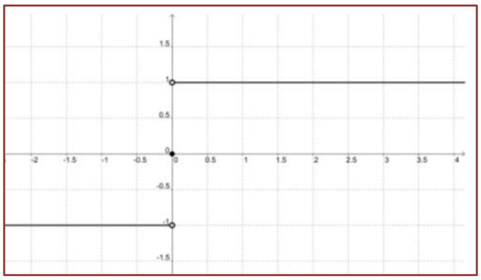
b) monoton csökkenőnek

mondjuk, ha $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén

$a)$ $f(x_1) \leq f(x_2)$

$b)$ $f(x_1) \geq f(x_2)$

</td>
<td>



Monoton növekvő függvény

</td>
</tr>
</table>

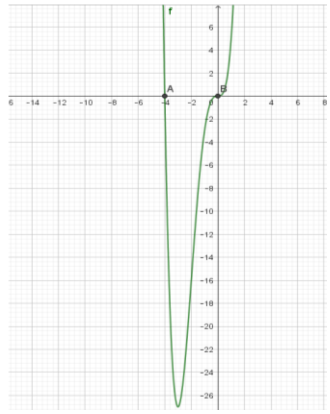
<table>
<tr>
<td>

Zérushely

Az f függvény *zérushelye* az $x_0 \in D_f$,
ha $f(x_0) = 0$

(a függvénygrafikon azon pontjának x koordinátája, mely az x-tengelyen van)

</td>
<td>



A függvény grafikonja metszi az x-tengelyt az $A(4; 0)$, $B(0; 0)$ pontokban.

Így a függvény zérushelyei:

$x_1 = 4;\ x_2 = 0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Paritás

Az f függvény

a) páros, ha bármely $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és

$$f(-x) = f(x)$$

b) páratlan, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és

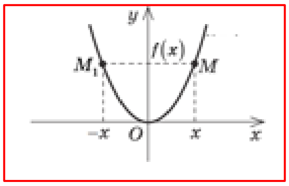
$$f(-x) = -f(x)$$

A páros függvény grafikonja az y-tengelyre *szimmetrikus*.

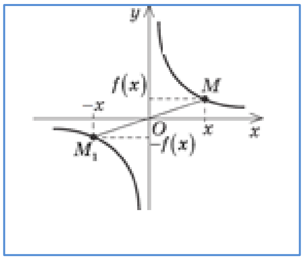
A páratlan függvény grafikonja az origóra középpontosan *szimmetrikus*.

</td>
<td>

(például: $x \to x^2$)



$\left(\text{például: } x \to \dfrac{1}{x}\right)$



</td>
</tr>
</table>

Szélsőérték

Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen

a) (abszolút) maximuma

b) (abszolút) minimuma

van, ha bármely $x \in D_f$ esetén

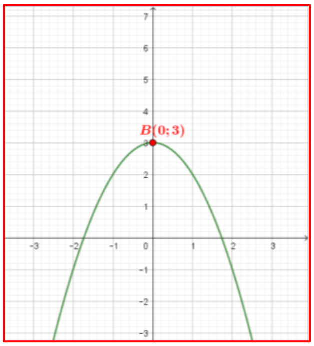
$a)$ $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x_0)$ a függvény értékkészletének legnagyobb eleme)

$b)$ $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x_0)$ a függvény értékkészletének legkisebb eleme)

Megjegyzés:

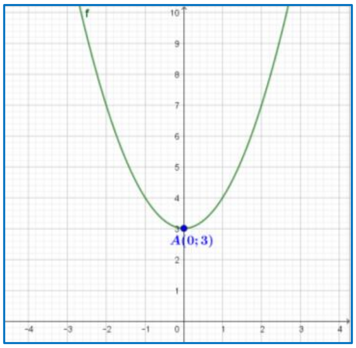
Hasonló módon definiálódik a lokális maximumhely (minimumhely) fogalma.

A függvénynek az értelmezési tartományának egy részhalmazán a változó egy bizonyos értékénél akkor van *lokális minimum (maximum)helye*, ha a függvény az adott részhalmazon sehol sem vesz fel az adott változóhoz



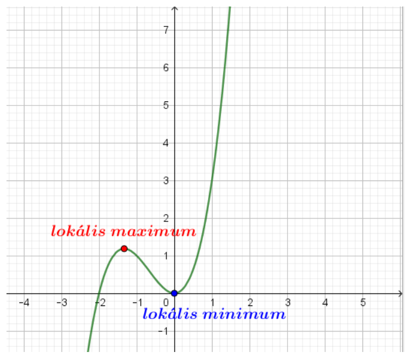
abszolút maximumhely: $x = 0$

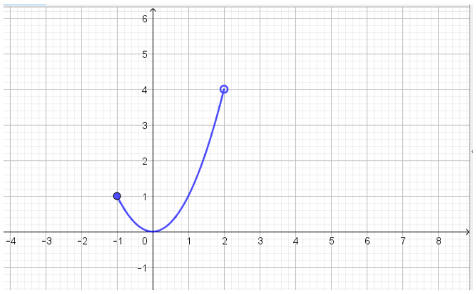
maximum érték: $f(0) = 3$



abszolút minimumhely: $x = 0$

minimum érték: $f(0) = 3$



tartozónál *kisebb* *(nagyobb)* függvényértéket. Minden abszolút szélsőérték egyben lokális szélsőérték is.	
Korlátosság Az f függvény *alulról korlátos,* ha $\exists k \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in D_f$ esetén $$f(x) \geq k$$ (az értékkészlete alulról korlátos) Az f függvény *felülről korlátos,* ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in D_f$ esetén $$f(x) \leq K$$ (az értékkészlete felülről korlátos) Az f függvény *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos (az értékkészlete korlátos).	 Alulról és felülről is korlátos: a függvény értékei $k = 0$-tól nagyobbak és $K = 4$-től kisebbek. Azaz: $$0 \leq f(x) < 4$$
Periodikusság Az f függvény periodikus, ha van olyan $p \in \mathbb{R}$, melyre $$f(x+p) = f(x)$$ Ha az f függvény periodikus, akkor végtelen sok megfelelő p érték van. Ha a definícióban meghatározott tulajdonságú p értékek halmazának van legkisebb eleme, akkor ezt a számot az f függvény *periódus*ának nevezzük.	A trigonometrikus függvények periodikusak. A szinusz és a koszinusz függvények periodusa 2π, a tangens és a kotangesn függvények periodusa pedig π.

Függvénytranszformációk
Változó-transzformációk: **1.** $f(x+c)$: eltolás az *x*-tengely mentén, $-c$ egységgel **2.** $f(c \cdot x)$: $\frac{1}{c}$ –szeres nyújtás az *x*-tengely mentén ($c > 0$) **3.** $f(-x)$: tükrözés az *y*-tengelyre *Érték-transzformációk:* **4.** $f(x) + c$: eltolás az *y*-tengely mentén, c egységgel **5.** $c \cdot f(x)$: c –szeres nyújtás az *y*-tengely mentén ($c > 0$) **6.** $-f(x)$: tükrözés az *x*-tengelyre

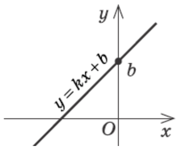
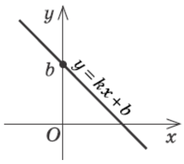
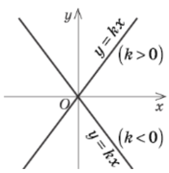
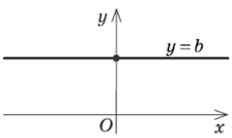
A következőkben áttekintünk néhány, középiskolában leggyakrabban tárgyalt függvénytípust és azok transzformálásával nyert függvényeket, valamint azok tulajdonságait. A függvények közül néhánynak a grafikonját csak vázoljuk.

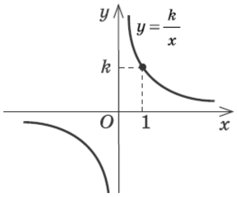
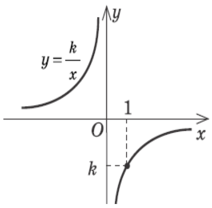
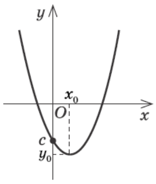
- **Hatványfüggvények**: $f(x) = x^n$, n –valós szám
- **Polinomfüggvények:** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, n-nemnegatív egész szám, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$-állandók, a polinom együtthatói. Ha $a_n \neq 0$, akkor az n számot a polinom fokszámának nevezzük (azaz az x legnagyobb hatványa a polinom fokszáma).

  $n = 2$ esetén a másodfokú polinomnak létezik *gyöktényezős felbontása*, ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek van megoldása (azaz a $P(x) = ax^2 + bx + c$ függvénynek van(nak) zérushelye(i)). Ekkor, ha a polinom zérushelyei x_1 és x_2, akkor a gyöktényezős felbontás: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

  Minden polinom felbontható elsőfokú és valós gyökkel nem rendelkező másodfokú tényezők szorzatára. Egy $(x - c)$ tényező pontosan akkor szerepel a *P* felbontásában, ha *c* gyöke *P*-nek, azaz $P(c) = 0$.
- **Racionális törtfüggvények:** a polinomfüggvények hányadosaként adhatók meg: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- **Trigonometrikus függvények** (lásd a 6. fejezetet)**:**

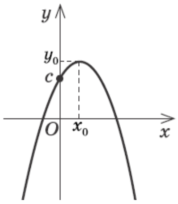
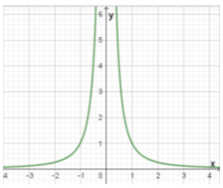
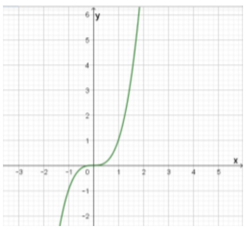
  $$f(x) = sinx, \qquad g(x) = cosx, \qquad h(x) = tgx, \qquad k(x) = ctgx$$
- **Exponenciális függvények:** $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$
- **Logaritmusfüggvények:** $f(x) = log_a x, a > 0, a \neq 1$

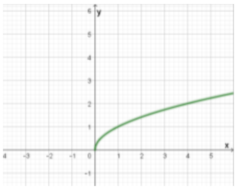
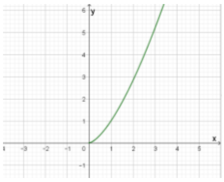
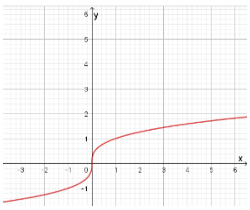
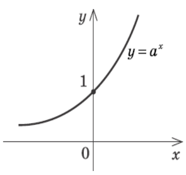
<table>
<tr><td colspan="7">Lineáris függvény: $f(x) = kx + b$
(az $f(x) = x$ hatványfüggvény transzformálásával kapott függvény, elsőfokú polinomfügvény)</td></tr>
<tr><th>Grafikon</th><th>D_f</th><th>R_f</th><th>Zérus-hely</th><th>Monoto-nitás</th><th>Paritás</th><th>Szélső-érték</th></tr>
<tr><td>$k > 0$
</td><td rowspan="4">ℝ</td><td rowspan="3">ℝ</td><td rowspan="2">$x_0 = -\frac{b}{k}$</td><td>szig.mon
nő</td><td rowspan="2">se nem páros se nem páratlan</td><td rowspan="3">nincs mini-muma, se maxi-muma</td></tr>
<tr><td>$k < 0$
</td><td>szig.mon
csökken</td></tr>
<tr><td>$b = 0$
</td><td>$x_0 = 0$</td><td>Ha
$k > 0$
szig.mon
nő.
Ha
$k < 0$
szig.mon
csökken</td><td>páratlan</td></tr>
<tr><td>$k = 0$
</td><td>b</td><td>nincs zérushely (sehol sem metszi az x-tengelyt)</td><td>állandó
(monton növekvő/ monoton csökkenő</td><td>páros</td><td>minimum- és maximum-helyeinek halmaza
ℝ</td></tr>
</table>

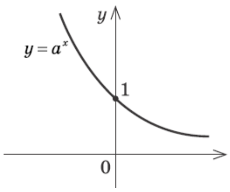
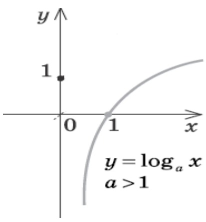
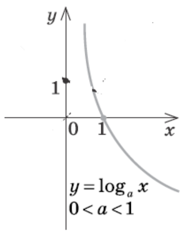
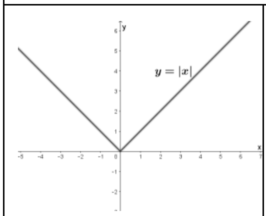
<table>
<tr><td colspan="7">Fordított arányosság: $f(x) = kx^{-1} = \frac{k}{x} \quad (k \neq 0)$
(az $f(x) = x^{-1}$ hatványfüggvény transzformálásával kapott függvény, racionális törtfüggvény)</td></tr>
<tr><td>$k > 0$

</td><td rowspan="2">$\mathbb{R}\setminus\{0\}$</td><td rowspan="2">$\mathbb{R}\setminus\{0\}$</td><td rowspan="2">nincs</td><td>szig. mon.
csökken
$]-\infty;0[$
és
$]0;+\infty[$</td><td rowspan="2">páratlan</td><td rowspan="2">nincs</td></tr>
<tr><td>$k < 0$

</td><td>szig. mon.nő:
$]-\infty;0[$
és
$]0;+\infty[$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Másodfokú függvény: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
(az $f(x) = x^2$ hatványüggvény transzformálásával kapott polinomfüggvény)</td></tr>
<tr><td>$a > 0$


$(D = b^2 - 4ac \geq 0)$
$x_0 = -\frac{b}{2a}$
$y_0 = f(x_0)$
(azaz y_0 a függvényérték az x_0 helyen)</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[y_0;+\infty[$</td><td>$f(x) = 0$
egyenlet megol-dása(i)</td><td>szig.mon nő:
$[x_0;+\infty[$

szig.mon csökken:
$]-\infty;x_0]$</td><td>Általá-nosan: se nem páros, se nem páratlan.
Ha b=0, akkor páros</td><td>$x_0 = -\frac{b}{2a}$
mini-mumhely</td></tr>
</table>

$(x_0;\ y_0)$- a parabola csúcspontja						
$a < 0$ 		$]-\infty; y_0]$		szig.mon csökken: $[x_0; +\infty[$ szig.mon nő: $]-\infty; x_0]$		$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ maxi-mumhely
$\boldsymbol{f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}}$ (hatványfüggvény, $n = -2$)						
	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$]0; +\infty[$	nincs	szig.mon csökken: $]0; +\infty[$ szig.mon nő: $]-\infty; 0[$	páros	nincs
$\boldsymbol{f(x) = x^3}$ (hatványfüggvény, $n = 3$)						
	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x = 0$ $x^3 = 0$ egyenlet megol-dása	szig.mon nő az ért. tartomá-nyon	páratlan	nincs

<table>
<tr><td colspan="7">Hatványfüggvények, melyeknél $n = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{2}, n = \frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>Négyzetgyök-függvény:
$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$
</td><td>$[0; \infty[$</td><td>$[0; \infty[$</td><td rowspan="2">$x = 0$</td><td rowspan="2">szig.mon
nő az ért. tartományon</td><td>se nem páros, se nem páratlan</td><td>$x = 0$
minimumhely</td></tr>
<tr><td>$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$
</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>páratlan</td><td>nincs</td></tr>
<tr><td colspan="7">Exponenciális függvény: $f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$

</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$]0; +\infty[$</td><td>nincs
$a^x \neq 0$</td><td>szig.mon
nő az ért. tartományon</td><td>se nem páros, se nem páratlan</td><td>nincs</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$0 < a < 1$
</td><td></td><td></td><td></td><td>szig.mon
csökken az ért. tartomá-nyon</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Logaritmusfüggvény: $f(x) = log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$
</td><td rowspan="2">$]0; +\infty[$</td><td rowspan="2">$\mathbb{R}$</td><td rowspan="2">$x = 1$</td><td>szig.mon
nő az ért. tartomá-nyon</td><td rowspan="2">se nem páros, se nem páratlan</td><td rowspan="2">nincs</td></tr>
<tr><td>$0 < a < 1$
</td><td>szig.mon
csökken az ért. tartomá-nyon</td></tr>
<tr><td colspan="7">Abszolútérték-függvény: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & ha\ x \geq 0, \\ -x, & ha\ x < 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[0; +\infty[$</td><td>$x = 0$</td><td>szig.mon
csökken:
$]-\infty; 0]$

szig.mon
nő:
$[0; +\infty[$</td><td>páros</td><td>abszolút minimum-helye
$x = 0$</td></tr>
</table>

Inverz függvény

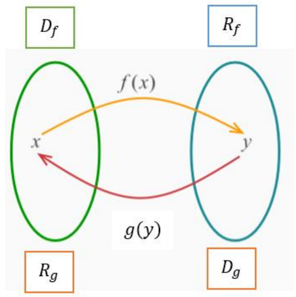
Az $f: A \to B$ függvény pontosan akkor *invertálható*, ha minden $y \in R_f$ elemhez pontosan egy olyan $x \in D_f$ elem van, melyre $f(x) = y$.

Invertálható f függvény esetén a g függvény az f függvény inverze, ha g értelmezési tartomány megegyezik f értékkészletével, azaz:

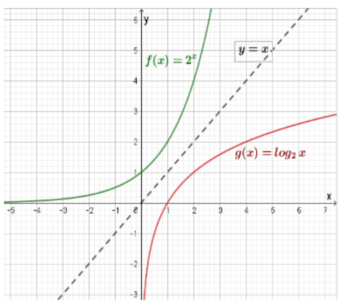
$$D_g = R_f \text{ és } f(x) = y \text{ esetén } g(y) = g(f(x)) = x.$$

Tehát: $\forall x \in D_f$ esetén $g\big(f(x)\big) = x$ vagy $\forall y \in D_G$ esetén $f\big(g(y)\big) = y$

Jelölése: $g = f^{-1}$



A függvények grafikonjainak szempontjából ez azt jelenti, hogy az f és a g grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre.



x	$f(x) = 2^x$
0	1
2	4
-2	$\frac{1}{4}$

x	$g(x) = \log_2 x$
1	0
4	2
$\frac{1}{4}$	-2

Függvények kompozíciója (összetett függvénye)	
Az f és a g *függvények kompozíciója (összetett függvénye)* az a $h = g \circ f$ függvény, melynek értelmezési tartománya $D_h = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ és $x \in D_h$ esetén $$h(x) = g(f(x))$$ A $g \circ f$ kompozícióban f a belső függvény, g pedig a külsö függvény. $$g \circ f \neq f \circ g$$	Határozzuk meg az $$f(x) = x^2 \text{ és } g(x) = 2x - 1$$ függvények esetén a $g \circ f$ és $f \circ g$ kompozíciókat! <u>Megoldás:</u> Kompozíció esetén hasznos egy függvényre úgy gondolni, hogy az az argumentumát alakítja át, éppen a hozzárendelési utasítás mondja meg, hogy mit "csinál" az argumentumával. A fenti f függvény négyzetre emeli az argumentumát, bármi is az, a g függvény pedig az argumentuma kétszereséből kivon egyet. $$h(x) = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2).$$ Tehát a g függvény helyettesítési „értékét” keressük az x^2 „helyen”. Behelyettesítve a g függvény képletébe az x helyére (ami eredetileg a függvény argumentuma volt) az x^2-et, kapjuk: $$g\big(f(x)\big) = g(x^2) = 2x^2 - 1.$$ Hasonlóképpen megkeressük a $k(x) = f \circ g$ kompozíciót: $$k(x) = f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x - 1)$$ Tehát $$f\big(g(x)\big) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$ Jelen példánk is jól mutatja, hogy $$g \circ f \neq f \circ g$$

1. feladat: Tekintsük az $f: \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-3}$ függvényt.

a) Adjuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2!

b) Adjuk meg azokat az x valós számokat, amelyekre a függvényérték negatív!

Megoldás:

a) Az értelmezési tartománynak azt az elemét, melyre a függvényérték 2 az $f(x) = 2$ egyenlet megoldása adja.

$$\frac{1}{x-3} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 2(x-3).$$

Azaz $x = 3{,}5$.

b) Azokat az x valós számokat keressük, melyek esetén $f(x) < 0$, azaz az

$$\frac{1}{x-3} < 0$$

egyenlőtlenség megoldását keressük.

Pozitív szám negatív számmal való osztása esetén lesz a hányados negatív. Tehát az egyenlőtlenségnek abban az esetben lesz megoldása, ha

$$x - 3 < 0 \Longrightarrow \; x < 3.$$

Így a keresett valós számok a $]-\infty; 3[$ intervallum elemei.

2. feladat: Tekintsük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$ függvényt. Mutassuk meg, hogy

$$f(a+2) - f(a-2) = \frac{80}{9} \cdot 3^a$$

Megoldás:

Először meg kell határoznunk $f(a+2)$-őt. Vagyis meg kell határoznunk az f függvény helyettesítési „értékét” az $x = a + 2$ helyen:

$$f(a+2) = 3^{a+2}$$

Felhasználva a megfelelő hatványazonosságot ($b^{n+m} = b^n \cdot b^m$), kapjuk:

$$f(a+2) = 3^{a+2} = 3^a \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^a.$$

Hasonlóképpen

$$f(a-2) = 3^{a-2} = 3^a \cdot 3^{-2} = \frac{1}{9} \cdot 3^a.$$

Akkor

$$f(a+2)-f(a-2)=9\cdot 3^a-\frac{1}{9}\cdot 3^a=3^a\left(9-\frac{1}{9}\right)=\frac{80}{9}\cdot 3^a.$$

3. feladat: Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ függvényt. Igazoljuk, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\frac{1}{x\cdot x_0}\quad (x\neq x_0)$$

Megoldás:

Mivel

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}.$$

Ezt kell osztanunk $(x-x_0)$-val, vagyis szoroznunk $\frac{1}{x-x_0}$-val. Azaz:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}\cdot\frac{1}{x-x_0}=\frac{-(x-x_0)}{x\cdot x_0}\cdot\frac{1}{x-x_0}=-\frac{1}{x\cdot x_0}$$

4. feladat: Egy 100 m magas torony tetejéről leejtett kő távolsága a talajtól t másodperc elteltével $h(t)=100-4{,}9t^2\ [m]$. Adjuk meg a kő átlagsebességét egy tetszőleges $[t_0;t_1]$ időintervallumban! Adjuk meg az átlagsebességet a $[0;2]$ időintervallumban!

Megoldás:

A kő átlagsebességét egy tetszőleges $[t_0;t_1]$ időintervallumba

$$\frac{h(t_1)-h(t_0)}{t_1-t_0}.$$

Tehát a megadott időintervallum alatt megtett utat el kell osztani az eltelt idővel.

$$\frac{h(t_1)-h(t_0)}{t_1-t_0}=\frac{100-4{,}9{t_1}^2-(100-4{,}9{t_0}^2)}{t_1-t_0}=\frac{4{,}9{t_0}^2-4{,}9{t_1}^2}{t_1-t_0}=\frac{4{,}9({t_0}^2-{t_1}^2)}{t_1-t_0}.$$

Felhasználva az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ nevezetes azonosságot, kapjuk, hogy

$$\frac{h(t_1)-h(t_0)}{t_1-t_0}=\frac{4{,}9(t_0-t_1)(t_0+t_1)}{t_1-t_0}=-4{,}9(t_0+t_1).$$

Akkor a kő átlagsebessége a $[0;2]$ időintervallumban

$$\frac{h(2)-h(0)}{2-0} = -4{,}9(2+0) = -9{,}8\ \left[\frac{m}{s}\right].$$

5. feladat: Legyen $f(x) = x^2 - 11x + 30$. Igazolja, hogy ha $f(x) \neq 0$, akkor

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x-4}{x-6}$$

Megoldás:

Először meghatározzuk az adott függvény helyettesítési „értékét” az $(x+1)$ helyen. (Azaz az $f \circ g$ kompozíciót keressük, ahol $g(x) = x + 1$.)

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 - 11(x+1) + 30 = x^2 + 2x + 1 - 11x - 11 + 30 \\ &= x^2 - 9x + 20. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 11x + 30}.$$

A számlálóban és a nevezőben lévő másodfokú polinomoknak vannak gyökeik, ezért gyöktényezőkre bonthatók:

A $P(x) = x^2 - 9x + 20$ polinom gyökei $x_1 = 4$ és $x_2 = 5$.

A $Q(x) = x^2 - 11x + 30$ polinom gyökei $x_1 = 5$ és $x_2 = 6$.

Ekkor

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{(x-4)\cdot(x-5)}{(x-5)\cdot(x-6)}.$$

A feladat feltétele alapján $f(x) \neq 0$. Mivel $f(x) = (x-5)\cdot(x-6)$, ezért $x - 5 \neq 0$ vagy $x - 6 \neq 0$. Ennélfogva a kapott tört egyszerűsíthető az $(x-5)$-tel. Akkor

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x-4}{x-6}.$$

6. feladat: Határozzuk meg a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazát, melyen az

$$f(x) = \sqrt{12x - 12 - 3x^2}$$

függvény értelmezhető!

Megoldás:

A megadott függvény két függvény, a $k(x) = \sqrt{x}$ és a $b(x) = 12x - 12 - 3x^2$ függvények kompozíciójából áll elő: $f(x) = k \circ b = k(b(x))$, ahol $k(x)$ a külső függvény, $b(x)$ a belső függvény. Emiatt olyan x értékeket keresünk, melyek mellett a $b(x)$ belső függvény értékei a $k(x)$ külső függvény értelmezési tartományának elemei lesznek.

Minthogy a külső függvény négyzetgyökfüggvény, ezért annak definíciója miatt az értelmezési tartományának elemei csak nemnegatív számok lehetnek, azaz teljesülnie kell a

$$b(x) \geq 0$$

egyenlőtlenségnek.

Ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$12x - 12 - 3x^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséget.

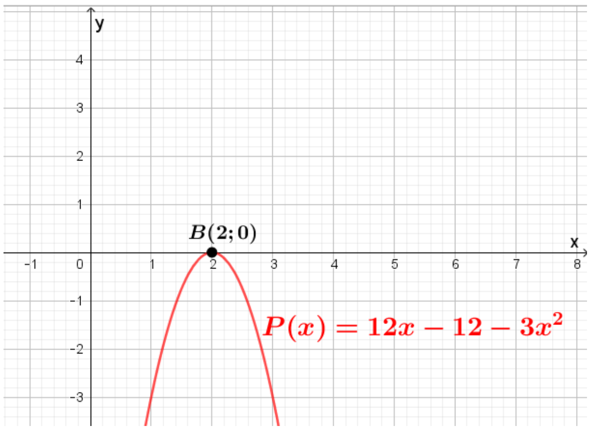
Másodfokú egyenlőtlenség lévén először megkeressük a $P(x) = 12x - 12 - 3x^2$ polinom gyökeit, amennyiben léteznek. Ehhez meg kell oldanunk a

$$12x - 12 - 3x^2 = 0$$

egyenletet.

Ennek megoldása $x = 2$.

Tehát a $P(x)$ polinomfüggvény grafikonja (mely egy parabola) az x-tengelyt egyetlen pontban, a $(2; 0)$ pontban metszi.



Az ábra is jól mutatja, hogy a függvény grafikonjának pontjai, egy pont kivételével, az x-tengely alatt vannak, ahol a pontok y koordinátái, azaz a függvényértékek negatívak.

Olyan $(x; y)$ pontok x koordinátái mellett fog teljesülni a fenti egyenlőtlenség, melyeknél $y \geq 0$. Ez a grafikon egyetlen pontjában teljesül. Ez a pont a függvényünk x-tengellyel való metszéspontja. Ennek x koordinátája: $x = 2$.

Tehát az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya egyelemű halmaz:

$$D_f = \{2\}$$

7. feladat: Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

függvény értelmezve van!

<u>Megoldás:</u>

A megadott függvény két függvény, a $k(x) = \ln x$ és a $b(x) = 1 + \frac{1}{x}$ függvények kompozíciójából áll elő: $f(x) = k \circ b = k(b(x))$, ahol $k(x)$ a külső függvény, $b(x)$ a belső függvény. Emiatt olyan x értékeket keresünk, melyek mellett a $b(x)$ belső függvény értékei a $k(x)$ külső függvény értelmezési tartományának elemei lesznek.

Minthogy a külső függvény logaritmusfüggvény, ezért annak definíciója miatt az értelmezési tartományának elemei csak pozitív számok lehetnek, azaz teljesülnie kell a

$$b(x) > 0$$

egyenlőtlenségnek.

Tehát a feladatunk, hogy oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$1 + \frac{1}{x} > 0$$

egyenlőtlenséget.

Az adott egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\frac{1 + x}{x} > 0$$

egyenlőtlenséggel.

Egy tört értéke akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos
előjelű, tehát két esetet kell vizsgálnunk.

$$I.\quad \begin{cases} 1+x>0 \\ x>0 \end{cases} \qquad \text{vagy} \qquad II.\quad \begin{cases} 1+x<0 \\ x<0 \end{cases}$$

Az I. egyenlőtlenségrendszer megoldása a $]0;\ +\infty[$ halmaz, a II. egyenlőtlenségrendszer megoldása a $]-\infty;\ -1[$ halmaz.

Ennélfogva az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya ezen két halmaz uniója. Azaz

$$D_f =]-\infty;\ -1[\, \cup\,]0;\ +\infty[\, = \mathbb{R}\backslash[-1;0].$$

(Megjegyzés: a megoldott egyenlőtlenség egy másik megoldási módszerét lásd a 4. fejezetben.)

8. feladat: A függvénygrafikonok megszerkesztése nélkül vizsgáljuk meg paritás szempontjából a következő függvényeket!

a) $f(x) = \frac{x^2}{\sin(2x)}$

b) $g(x) = \frac{x^2}{\cos(2x)}$

c) $h(x) = \frac{1}{x^2} - x$

Megoldás:

a) A függvény grafikonjának ismerete nélkül a paritás vizsgálatához az $f(-x)$ kifejezést kell megvizsgálnunk. Azaz a függvény képletébe az x helyére $-x$-et helyettesítünk.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sin(2\cdot(-x))} = \frac{x^2}{\sin(-2x)}.$$

Mivel a szinuszfüggvény páratlan (lásd a 6. fejezetet), azaz $\sin(-x) = -\sin x$, ezért $\sin(-2x) = -\sin(2x)$.

Ezért

$$f(-x) = -\frac{x^2}{\sin(2x)} = -f(x).$$

A páratlan függvény definíciója értelmében a megadott függvény páratlan.

b) Felhasználva, hogy a koszinusz függvény páros, azaz $\cos(-x) = \cos x$, azt kapjuk, hogy

$$g(-x)=\frac{(-x)^2}{\cos(-2x)}=\frac{x^2}{\cos(2x)}=g(x).$$

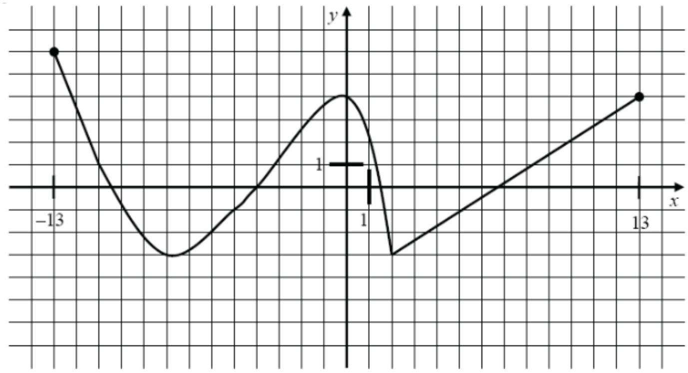
Tehát a $g(x)$ függvény páros.

c) Mivel

$$h(-x)=\frac{1}{(-x)^2}-(-x)=\frac{1}{x^2}+x=-\left(-\frac{1}{x^2}-x\right),$$

ezért $h(-x)\neq -h(x)$ és $h(-x)\neq h(x)$. Ez azt jelenti, hogy a megadott függvény se nem páros, se nem páratlan.

9. feladat: Vizsgáljuk meg az ábrán látható függvényt értelmezési tartomány, értékkészlet, paritás, monotonitás, szélsőértékhelyek, legnagyobb és legkisebb értékek szempontjából!



Megoldás:

- értelmezési tartomány: $x\in[-13;13]$;
- értékkészlet: $f(x)\in[-3;6]$;
- paritás: az origóra nem középpontosan szimmetrikus, illetve az y-tengelyre sem szimmetrikus, emiatt se nem páros, se nem páratlan;
- monotonitás: szigorúan monoton csökkenő, ha $x\in[-13;-8]\cup[0;2]$

  szigorúan monoton növekvő, ha $x\in[-8;0]\cup[2;13]$;
- szélsőértékhelyek:

  lokális és egyben abszolút minimumhelyek:

  $x=-8$ és $x=2$; legkisebb érték: $f_{min}(2)=\ f_{min}(-8)=-3$;

lokális maximumhelyek: $x = 0$ és $x = 13$;

abszolút maximumhely: $x = -13$;

legnagyobb érték: $f_{\max}(-13) = 6$.

10. feladat: 40 km/h sebességgel haladó gépkocsi fél perc alatt 100 km/h-ra gyorsul fel. Mekkora utat tesz meg ez idő alatt? Ábrázoljuk a jármű által megtett utat az idő függvényében!

Megoldás:

A gyorsulás

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

ahol Δv – a sebességváltozás, Δt – az eltelt idő. A feladat feltétele alapján

$$\Delta v = 100 - 40 = 60 \left[\frac{km}{h}\right].$$

$$\Delta t = 0{,}5\, perc = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{60} óra = \frac{1}{120} óra.$$

Tehát

$$a = \frac{60}{\frac{1}{120}} = 7200 \left[\frac{km}{h^2}\right].$$

Fél perc alatt a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = 40 \cdot \frac{1}{120} + \frac{7200}{2} \cdot \left(\frac{1}{120}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} [km]$$

A jármű által megtett út idő függvényében történő megadásához a kezdősebességet és a gyorsulást is km/perc-ben adjuk meg. Akkor $v_0 = 40 \frac{km}{óra} = \frac{40}{60} \frac{km}{perc} = \frac{2}{3} \frac{km}{perc}$, továbbá $a = 7200 \frac{km}{h^2} = 2 \frac{km}{p^2}$.

A koordináta-rendszerben a következő függvényt kell ábrázolnunk:

$$s(t) = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \frac{2}{3} t + t^2. \quad (t > 0)$$

Ez a függvény egy másodfokú függvény, melynek képe parabola. Az ábrázolását függvénytranszformációk segítségével végezhetjük.

1.) Teljes négyzetté alakítjuk a $\frac{2}{3}t+t^2$ kifejezést:

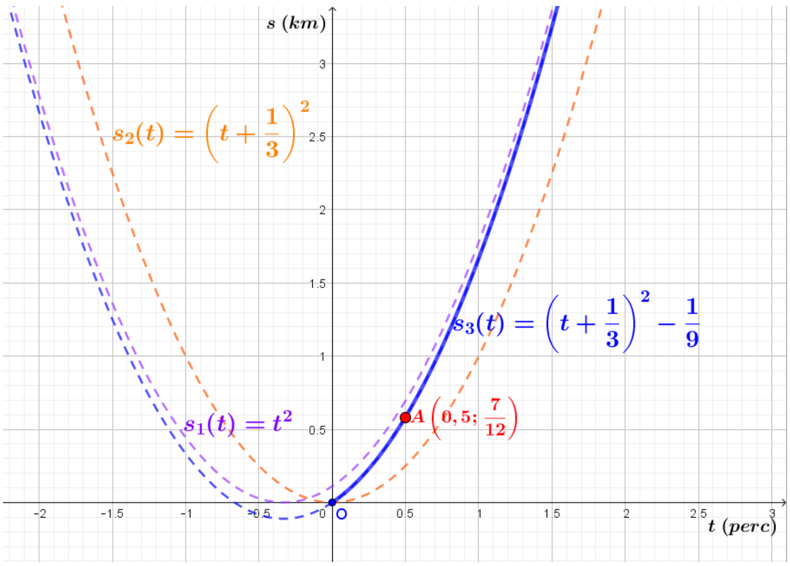
$$s(t)=\frac{2}{3}t+t^2=\left(t+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9},\ \ t>0$$

Az ábrázoláshoz a következő függvénytranszformációs lépéseket kell elvégeznünk:

a) ábrázoljuk az $s_1(t)=t^2$ függvényt;

b) ábrázoljuk az $s_2(t)=s_1\left(t+\frac{1}{3}\right)=\left(t+\frac{1}{3}\right)^2$ függvényt (lásd fentebb az 1. függvénytranszformációt);

c) ábrázoljuk az $s_3(t)=s_2(t)-\frac{1}{9}$ függvényt $(t>0)$ (lásd fentebb a 4. függvénytranszformációt);



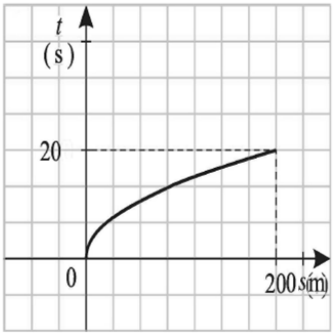
11. feladat: Az álló helyzetből egyenletes gyorsulással induló vonat *20 s* alatt *200 m* utat tesz meg. Ábrázoljuk a menetidőt a megtett út függvényében!

Megoldás:

Az $s=\frac{a}{2}t^2$ összefüggésből $a=\frac{2s}{t^2}$, így $a=\frac{2\cdot200}{400}=1\left[\frac{m}{s^2}\right]$. A menetidő az út függvényében

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2s}$$

A kapott négyzetgyök függvény képe



12. feladat: Adott az ABC háromszög AB és AC oldala, $AB = 10\ cm,\ \ AC = 6\ cm.$ A két oldal által bezárt φ szöghöz rendeljük hozzá a háromszög területét. Mi lesz az így kapott függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

Megoldás:

Egy háromszög területe a háromszög két oldalának és az általuk bezárt szög szinusza szorzatának a fele. Tehát a keresett függvény:

$$T(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin\varphi = 30 \sin\varphi.$$

Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180^0, ezért a kapott függvény értelmezési tartománya

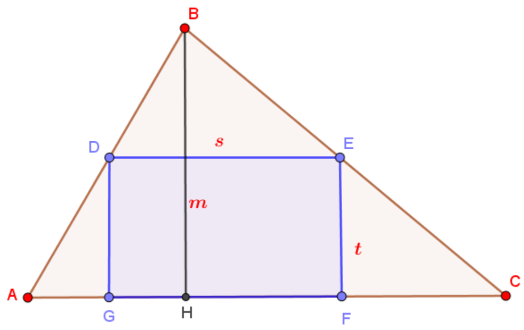
$$D_T =]0;\pi[\ \ (\varphi \in]0;\pi[)$$

Mivel ezen az intervallumon a szinuszfüggvény értékkészlete $]0;1[$, ezért a függvényünk értékkészlete

$$R_T =]0;30[\ \ \ (T(\varphi) \in]0;30[\,).$$

13. feladat: Az ABC háromszög oldalai $AC = 42,\ AB = 40$ és $BC = 26.$ Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög AC oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög AB, illetve BC oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai?

Megoldás:



Először kiszámoljuk a háromszög területét. Mivel mindhárom oldala ismert, ezért alkalmazhatjuk a Héron-képletét. Ehhez ki kell számolnunk a háromszög kerületét:

$$K = 42 + 40 + 26 = 108.$$

A félkerület tehát $k = 54$.

A háromszög területe

$$T = \sqrt{54 \cdot (54-40)(54-42)(54-26)} = 504.$$

Másrészt a háromszög területe

$$T = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot m = 21m$$

alakban is felírható. Akkor $504 = 21m$, azaz $m = 24$.

Jelöljük a háromszögbe írt legnagyobb területű téglalap oldalait s és t-vel az ábrán látható módon. Akkor a területe $T_{téglalap} = s \cdot t$.

Az ABC háromszög hasonló a DEB háromszöghöz, mivel a szögeik megegyeznek. Ezért az oldalaik arányosak. Tehát

$$\frac{AC}{s} = \frac{m}{m-t} \Longrightarrow \frac{42}{s} = \frac{24}{24-t}.$$

Rendezve az összefüggést azt kapjuk, hogy

$$1{,}75 \cdot (24 - t) = s.$$

Akkor a keresett téglalap területe

$$T(t) = 1{,}75 \cdot (24 - t) \cdot t = 42t - 1{,}75t^2.$$

Feladatunk a kapott függvény maximumának megkeresése.

A $T(t)$ függvény másodfokú függvény. Mivel a négyzetes tag együtthatója negatív, ezért a parabola ágai lefelé mutatnak. Tehát a keresett maximumhely a parabola $(t_0, T(t_0))$ csúcspontjának koordinátái közül a t_0, a maximum érték pedig $T(t_0)$.

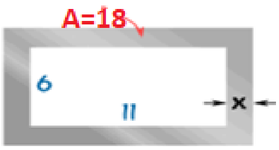
$$t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{42}{2 \cdot (-1{,}75)} = 12.$$

Ekkor

$$T(t_0) = 42 \cdot 12 - 1{,}75 \cdot 12^2 = 252.$$

Tehát a legnagyobb területű téglalap, mely a megadott oldalhosszúságú háromszögbe írható $t = 12$ és $s = 1{,}75 \cdot (24 - 12) = 21$ egység oldalhosszúságú és területe 252 négyzetegység.

14. feladat: Egy cég egy projekt részeként kereteket készít. A keretet acéllemezből vágják ki úgy, hogy a keret belső részének méretei 11 cm és 6 cm legyen (lásd az ábrát). Az így elkészült keretek területe maximum 18 cm² lehet. Ilyen feltételek mellett mekkora lehet a keret *x* vastagsága?



<u>Megoldás:</u>

A lemez területe kivágás előtt

$$T(x) = (11 + 2x) \cdot (6 + 2x) = 66 + 34x + 4x^2.$$

Miután kivágják belőle a 6x11-es téglalapot, a lemez területe, tehát az elkészíteni kívánt keret területe

$$T_k(x) = (11 + 2x) \cdot (6 + 2x) - 66 = 34x + 4x^2.$$

Az a kérdés, hogy milyen *x* értékeknél lesz ez a terület nem több, mint 18 cm². Tehát meg kell oldanunk a

$$34x + 4x^2 \leq 18$$

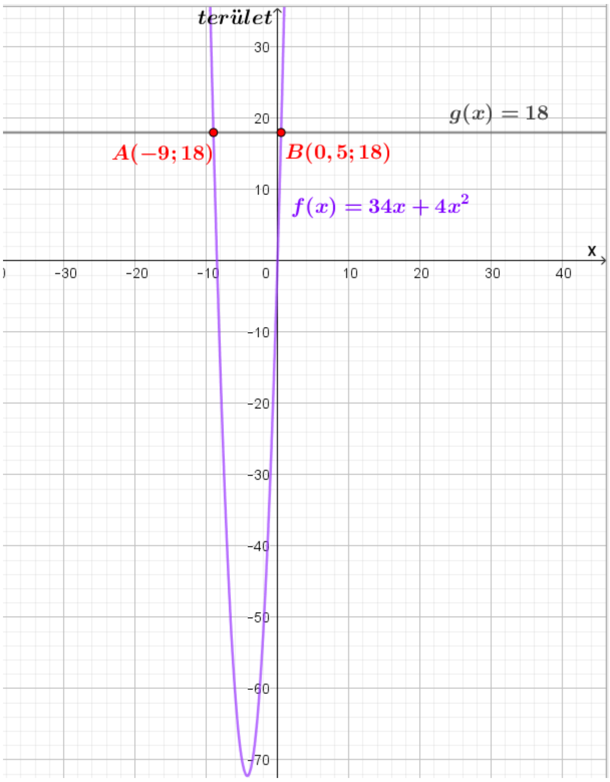
egyenlőtlenséget. A megoldáshoz a grafikus módszert választjuk. Ábrázoljuk az egyenlőtlenség bal és jobb oldalán lévő függvényeket és megkeressük a függvények metszéspontjait (ha vannak), majd a $T_k(x)$ függvény értelmezési tartományát a metszéspontok x koordinátáival felosztjuk és az így kapott intervallumok közül azt keressük meg, ahol a $g(x) = 18$ függvény grafikonja a $T_k(x)$ függvény fölött „halad”.

Az ábrán jól látható, hogy a keresett intervallum a $[-9; 0{,}5]$ intervallum. Mivel az x értékei csak pozitívak lehetnek, így a feladat feltételének megfelelő keretet csak úgy tudjuk elkészíteni, ha a vastagságot

$$0 < x \leq 0{,}5$$

feltételnek megfelelően választjuk meg.

(A másodfokú egyenlőtlenségek egy másik megoldási módját a 4. fejezetben mutatjuk be.)



15. feladat: Egy szupermarket egy bizonyos típusú DVD-lejátszóból egy hónap alatt 3 000 darabot értékesít 485 \$ áron. Amennyiben az árat 20 \$-ral csökkentik, úgy az eladott mennyiség 250 darabbal növekszik. Az eladott mennyiség és az eladási ár között elsőfokú függvénykapcsolatot feltételezünk!

a) Határozzuk meg a keresleti függvényt!

b) Adjuk meg azt az árat, amelyhez tartozó kereslet 0 darab!

c) Adjuk meg az inverz keresleti függvényt!

Megoldás:

a) A keresleti függvényt

$$f(p) = a \cdot p + b$$

alakban keressük. Tehát egy lineáris függvényt keresünk.

A függvény grafikonjára illeszkednek a (485; 3000) és a (465; 3250) pontok, így teljesülnek a

$$3000 = 485a + b$$

és a

$$3250 = 465a + b$$

egyenlőségek.

Ennélfogva meg kell oldanunk az

$$\begin{cases} 3000 = 485a + b \\ 3250 = 465a + b \end{cases}$$

egyenletrendszert.

A második egyenletből kivonva az első egyenletet kapjuk, hogy

$$250 = -20a \Longrightarrow a = -12{,}5.$$

Akkor $b = 9062{,}5$.

A keresleti függvény tehát

$$f(p) = -12{,}5p + 9\,062{,}5.$$

b) Azt a p árat keressük, mely mellett $f(p) = 0$, tehát az $f(p)$ lineáris függvény zérushelyét.

$$-12{,}5p + 9062{,}5 = 0 \Longrightarrow p = 725$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha a DVD-lejátszó ára 725 \$, akkor senki sem vásárolja a terméket.

c) Jelöljük az inverz keresleti függvényt g-vel és $f(p) = q$. A g függvény megkereséséhez elegendő az f függvény képletéből kifejezni a p változót q-on keresztül.

Tehát meg kell oldanunk a

$$-12{,}5p + 9062{,}5 = q$$

egyenletet, ahol az ismeretlen a p.

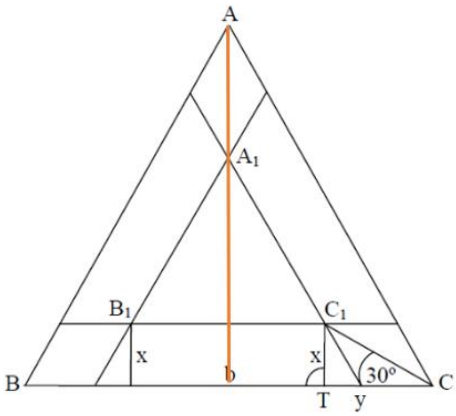
$$p = \frac{q - 9062{,}5}{-12{,}5} = -0{,}08q + 725.$$

Ezután a p és az q változók betűjeleit megcseréljük. Így az inverz keresleti függvény tehát

$$g(p) = f^{-1}(p) = -0{,}08p + 725$$

16. feladat: Kartonpapírból kivágunk egy 1,5 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 0,5 deciméternél kisebb *x* távolságra az *ABC* háromszög belseje felé. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$szabályos háromszög oldalegyenesei. Írjuk fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét *x* függvényében!

<u>Megoldás:</u>



Az ABC szabályos háromszög oldalának hossza ($B\angle = 60^0, h = 1{,}5\ m$)

$$AB = \frac{1{,}5}{\sin 60^0} = \sqrt{3}.$$

Az A_1, B_1, C_1 pontok rendre az A-ból, B-ből és C-ből induló belső szögfelezők pontjai. Jelöljük b-vel az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalának hosszát.

Az ábra alapján legyen $C_1T = x,\ CT = y$. Ekkor

$$\text{ctg } 30^0 = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = \sqrt{3} \cdot x.$$

A tengelyes szimmetria (az ABC háromszög magassága, mint tengely) figyelembevételével

$$b = \sqrt{3} - 2y = \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3}x = \sqrt{3} \cdot (1 - 2x).$$

Az $A_1B_1C_1$ háromszög területe tehát

$$T_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} b \cdot b \cdot \sin 60^0 = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Longrightarrow T_{A_1B_1C_1} = \frac{3\sqrt{3} \cdot (1 - 2x)^2}{4}.$$

A kapott függvény értelmezési tartománya: $D_T =]0; 0{,}5[$.

(Megjegyzés a feladathoz: emelt szinten a kapott függvénnyel meghatározható, például, hogy mekkora *x* esetén lesz annak a felül nyitott egyenes hasábnak a térfogata maximális, melyet úgy kapunk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhatjuk az *x* magasságú hasáb oldallapjait.)

17. feladat: Ábrázoljuk és jellemezzük az

$$f:]4; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x - 4} + 1$$

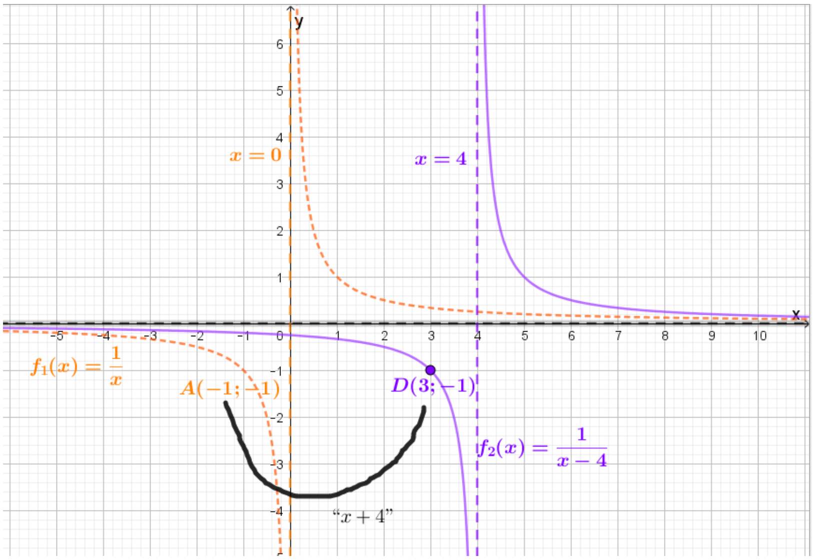
függvényt!

Megoldás:

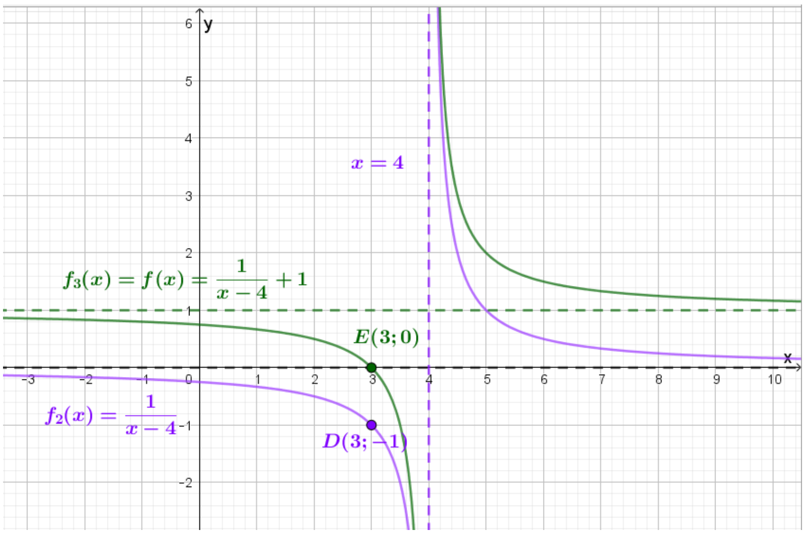
A függvényt az $f_1(x) = \frac{1}{x}$ függvény transzformációjából nyerhetjük a következő lépések elvégzésével:

1. $f_1(x) \to f_1(x - 4) = f_2(x)$ (lásd fentebb az 1. függvénytranszformációt)
2. $f_2(x) \to f_2(x) + 1 = f_3(x) = f(x)$ (lásd fentebb a 4. függvénytranszformációt)

Az 1. lépés azt jelenti, hogy az $f_1(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonja pontjainak *x* koordinátáihoz hozzáadunk 4-et, az *y* koordinátákat pedig nem változtatjuk. Mivel az f_1 függvény grafikonjának nincsenek olyan pontjai, amelynél $x = 0$ (*y*-tengelyen nincsenek pontjai a grafikonnak) és/vagy $y = 0$ (*x*-tengelyen nincsenek pontjai a grafikonnak), ezért az f_2 függvény grafikonjának sem lehetnek olyan pontjai, amelyeknél $x = 4$ és/vagy $y = 0$. Ezeket az egyeneseket szaggatott vonalak mutatják az ábrán.



A 2. lépésben az f_2 függvénygrafikon minden pontjának y koordinátájához hozzá kell adnunk 1-et (mivel a változás a függvényértékekben, azaz az y értékekben következik be). A pontok x koordinátái nem változnak. Mivel az $y = 0$ egyenest csak közelítette az f_2 függvény grafikonja, ezért az f_3 függvény grafikonja az $y = 0 + 1 = 1$ egyenest fogja közelíteni.



Jellemzés:

- értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ (vagy $x \in]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$);
- értékkészlet:$R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (vagy $f(x) \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$);

- paritás: az origóra nem középpontosan szimmetrikus,
  illetve az y-tengelyre sem szimmetrikus, emiatt se nem páros, se nem páratlan;

  Igazolás a definíció szerint:

$$f(-x)=\frac{1}{-x-4}+1=-\left(\frac{1}{x+4}-1\right)\neq -f(x)\neq f(x);$$

- zérushelyek: $x=3$;
- monotonitás: szigorúan monoton csökkenő, ha $x\in]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$);
- szélsőértékhelyek: nincsenek;
- nem korlátos (sem alulról, sem felülről nem korlátos);
- nem periodikus.

18. feladat: Tekintsük az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=2^{x+a}+b$$

függvényt.

a) Adjuk meg az a és b értékeket úgy, hogy $f(2)=12$ és $f(3)=28$ teljesüljön!

b) Ábrázoljuk és jellemezzük az így kapott függvényt!

c) Keressük meg a függvény inverzét!

<u>Megoldás:</u>

a) Mivel $f(2)=12$, ezért

$$12=2^{a+2}+b.$$

Mivel $f(3)=28$, ezért

$$28=2^{a+3}+b.$$

A második egyenletből kivonva az első egyenletet azt kapjuk, hogy

$$16=2^{a+3}-2^{a+2}$$

Az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosság ($a^{n+m}=a^n\cdot a^m$) alkalmazásával azt lapjuk, hogy

$$16=8\cdot 2^a-4\cdot 2^a=4\cdot 2^a\ \Longrightarrow 2^a=4\Longrightarrow a=2.$$

Ezt felhasználva

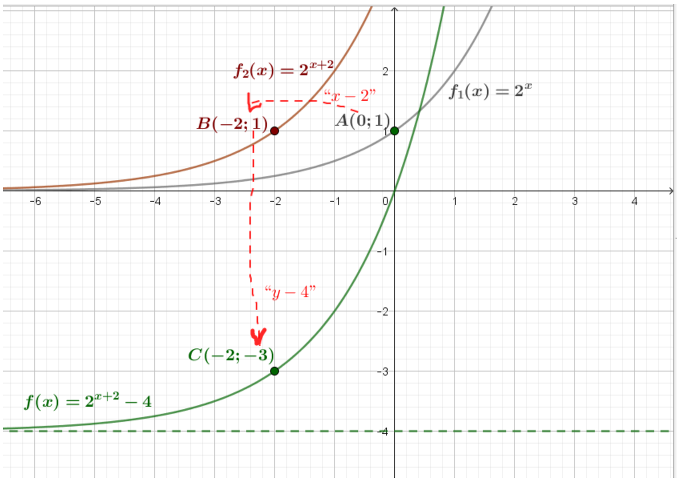
$$12=2^{2+2}+b\ \Longrightarrow\ \ b=-4.$$

A paraméterek ismeretében azt kapjuk, hogy

$$f(x) = 2^{x+2} - 4.$$

b) A kapott exponenciális függvény grafikonját több, az $f_1(x) = 2^x$ exponenciális függvényen elvégzett transzformációk segítségével kapjuk:

1. $f_1(x) \to f_1(x+2) = f_2(x)$ (lásd fentebb az 1. függvénytranszformációt)
2. $f_2(x) \to f_2(x) - 4 = f(x)$ (lásd fentebb a 4. függvénytranszformációt)



Jellemzés:

- értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}$;
- értékkészlet: $R_f =]-4; +\infty[$;
- paritás: az origóra nem középpontosan szimmetrikus, illetve az y-tengelyre sem szimmetrikus, emiatt se nem páros, se nem páratlan;

  Igazolás a definíció szerint:

  $$f(-x) = 2^{-x+2} - 4 \neq -f(x) \neq f(x)$$

- zérushelyek: keressük az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását: $x = 0$;
- monotonitás: szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon;
- szélsőértékhelyek: nincsenek;
- nem korlátos (alulról korlátos, alsó korlát $k = -4$, de felülről nem korlátos);
- nem periodikus.

c) Jelölje a keresett inverz függvényt f^{-1}. Ennek megkereséséhez elegendő az f függvény képletéből kifejezni az x változót. Legyen $f(x) = y$.

Tehát meg kell oldanunk a

$$2^{x+2} - 4 = y$$

egyenletet, ahol az ismeretlen az x.

$$2^{x+2} = y + 4.$$

Az exponenciális egyenlet megoldásához vegyük mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát:

:

$$\log_2 2^{x+2} = log_2(y + 4).$$

A logaritmus lg $a^n = n \cdot \lg a$ tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(x + 2) \cdot \log_2 2 = \log_2(y + 4) \Longrightarrow x + 2 = \log_2(y + 4).$$

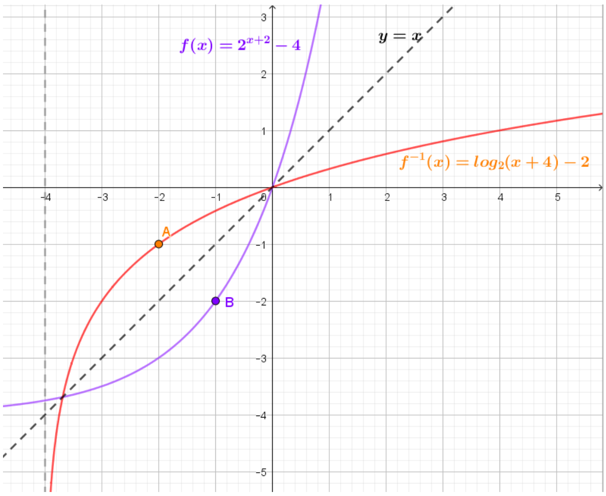
Ekkor

$$x = \log_2(y + 4) - 2$$

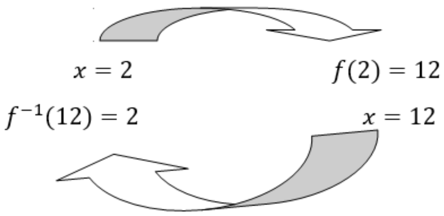
A keresett inverz függvény, tehát az

$$f^{-1}(x) = \log_2(x + 4) - 2$$

Logaritmusfüggvény lévén értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} =]-4; +\infty[$



Az ábra is jól mutatja, hogy az adott exponenciális függvény és annak inverzfüggvénye szimmetrikus az $y = x$ egyenesre. Továbbá



19. feladat: Határozzuk meg az $g \circ f, f \circ g, f \circ f, g \circ g, f \circ f \circ f$ kompozíciókat, ha

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = x^2 + 2.$$

<u>Megoldás:</u>

A függvények kompozíciójának definícióját felhasználva

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 = \frac{1}{x^2} + 2$$

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 2) = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$g \circ g(x) = g\big(g(x)\big) = g(x^2 + 2) = (x^2 + 2)^2 + 2$$

$$f \circ f \circ f(x) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x) = \frac{1}{x}$$

20. feladat: Legyen $h(x) = \cos(2x - 1)$. Adjunk meg olyan f és g függvényeket, hogy $h(x) = g(f(x))$ teljesüljön! (Azaz $h = g \circ f$ legyen.)

<u>Megoldás:</u>

Egy lehetséges megoldás

$$g(x) = cosx, \qquad f(x) = 2x - 1.$$

Ekkor valóban

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x - 1) = \cos(2x - 1).$$

(A g függvény képletébe az x helyére $2x - 1$-et helyettesítünk.)

Egy másik megoldás:

$$g(x) = \cos(x-1), \qquad f(x) = 2x.$$

Ekkor valóban

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = cos(f(x) - 1) = \cos(2x - 1).$$

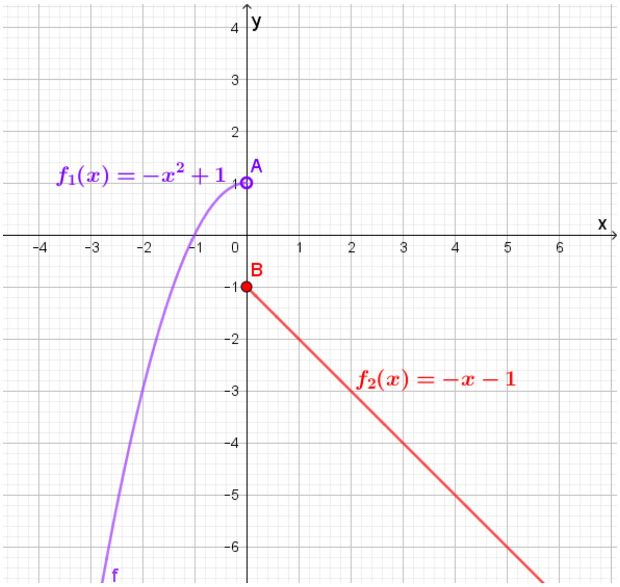
(A g függvény képletébe az x helyére $2x$-et helyettesítünk.)

21. feladat: Ábrázoljuk és jellemezzük az

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0 \\ -x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás:

Legyen $f_1(x) = -x^2 + 1,\ x < 0$ és $f_2(x) - x - 1,\ x \geq 0$. Az f_1 függvény grafikonjának $A(0;1)$ pontját azért jelöljük „üres" körrel, mert ez a pont nincs rajta a függvény grafikonján abból az okból, mert x csak kisebb lehet nullától és azzal nem lehet egyenlő.



Jellemzés:

- értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}$;
- értékkészlet:$R_f =]-\infty; 1[$;
- paritás: az origóra nem középpontosan szimmetrikus, illetve az y-tengelyre sem szimmetrikus, emiatt se nem páros, se nem páratlan;

- zérushelyek: $x = -1$;
- monotonitás: szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in [0; +\infty[$;
  szigorúan monoton növekvő, ha $x \in]-\infty; 0[$;
- szélsőértékhelyek: nincsenek;
- nem korlátos (alulról nem korlátos, felülről korlátos, felső korlát $K = 1$);
- nem periodikus.

Gyakorló feladatok

1. feladat: Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja parabola, melynek csúcspontja $M(1; -1)$. A parabola és az x-tengely egyik metszéspontja 2. Határozzuk meg az a, b, c értékét!

2. feladat: Határozzuk meg az

$$f(x) = lg(5 - |1 - x|)$$

függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit!

3. feladat: Legyen $f(x) = ln^2 x$ és $g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$. Adjuk meg az $f \circ g$ kompozíciót!

4. feladat: Ábrázoljuk az $f(x) = 2log_2(x + 2)$, $g(x) = \frac{1}{x} - 1$ és a $h(x) = 0{,}5^x + 2$ függvényeket!

a) Adjuk meg az értelmezési tartományukat és az értékkészletüket!

b) A megadott függvények közül melyik lesz szigorúan monoton növekvő az értelmezési tartományán?

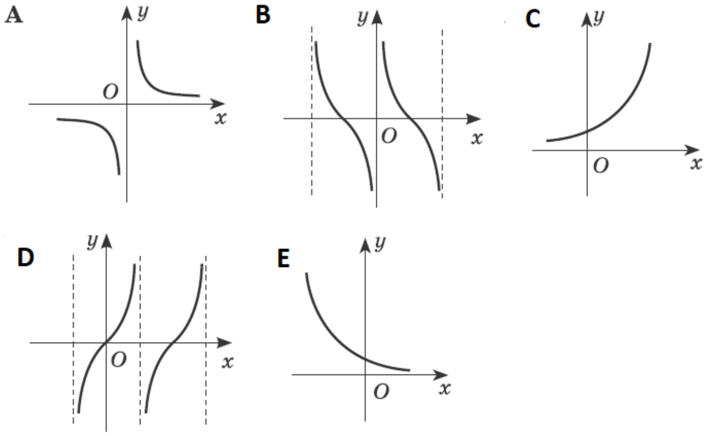
5. feladat: Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények.

$$f(x) = \begin{cases} -1, \ ha\ x \leq -1, \\ 2x + 1, \ ha -1 < x < 0, \\ 1, \ ha\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2 - 2$$

a) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben minkét függvényt! Adjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldását!

b) Adjuk meg a függvények grafikonjai által határolt zárt síkidom területét!

6. feladat: Párosítsuk a függvényeket azok grafikonjaival!



1.	$f(x) = tgx$
2.	$f(x) = ctgx$
3.	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
4.	$f(x) = \frac{1}{x}$

7. feladat: Tekintsük az

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x + a|$$

függvényt.

a) Adjuk meg az a értéket úgy, hogy $f(1) = 2$ teljesüljön!

b) Ábrázoljuk és jellemezzük az így kapott függvényt!

3 ALGEBRAI EGYENLETEK MEGOLDÁSA

Elméleti összefoglaló:

A következő táblázatban az alapvető algebrai egyenleteket soroljuk fel. A táblázatban a és b adott valós számok. Az egyenletekben szereplő ismeretlen az x.

Elsőfokú egyenlet: $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$	$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$
Másodfokú egyenlet: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$ $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$ $x_1 = 5; x_2 = 2$
Abszolútértékes egyenlet: $\lvert x \rvert = ax + b \Rightarrow$ $x = ax + b;\ -x = ax + b$	$\lvert x \rvert = 3 \Rightarrow x = \pm 3$
Gyökös egyenlet: $\sqrt{x} = ax + b \Rightarrow x = (ax + b)^2$ egyenletet kell megoldani	$\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$
Exponenciális egyenlet: $a^x = b \Rightarrow x = \frac{\lg b}{\lg a}$	$2^x = 3 \Rightarrow x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$
Logaritmikus egyenlet: $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$	$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{x-1}{3} + \frac{5x+2}{2} - \frac{x-1}{4} = 10$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$4 \cdot (x-1) + 6 \cdot (5x+2) - 3 \cdot (x-1) = 120.$$

A zárójeleket felbontva

$$4x - 4 + 30x + 12 - 3x + 3 = 120$$

adódik. Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$31x + 11 = 120.$$

Az egyenletet rendezve $x = \frac{109}{31}$ adódik. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

2. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x+2)^2 - 4 \cdot (x+1) = 1$$

egyenletet!

Megoldás:

A nevezetes azonosság elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 = 1.$$

Összevonás után azt

$$x^2 = 1$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

3. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

egyenletet!

Megoldás:

Megjegyezzük, hogy a megoldásokat az $x \neq 0$ valós számok halmazán kell keresnünk a tört miatt. Az egyenlet mindkét oldalát x −szel szorozva azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 1 = 2x,$$

amit nullára rendezve

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

adódik, aminek a bal oldala egy nevezetes azonosság, így

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

4. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{2x+3}{x^2-4} + \frac{5x-1}{x-2} + \frac{4}{x+2} = \frac{-13}{x+2}$$

egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

Mivel $x^2 - 4 = (x-2) \cdot (x+2)$, ezért az egyenlet átírható az alábbi alakra:

$$\frac{2x+3}{(x-2)\cdot(x+2)} + \frac{5x-1}{x-2} + \frac{4}{x+2} = \frac{-13}{x+2}.$$

Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \neq 2$, illetve $x \neq -2$.

Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2x + 3 + (5x-1)\cdot(x+2) + 4\cdot(x-2) = -13\cdot(x-2).$$

A zárójelek felbontása után

$$2x + 3 + 5x^2 + 10x - x - 2 + 4x - 8 = -13x + 26.$$

adódik. Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$5x^2 + 15x - 7 = -13x + 26.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$5x^2 + 28x - 33 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4\cdot 5\cdot(-33)}}{10} = \frac{-28 \pm 38}{10}.$$

Tehát $x_1 = 1$, illetve $x_2 = -6{,}6$. Mindkét szám eleme az értelmezési tartománynak. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmények megoldásai az eredeti egyenletnek.

5. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$|x+2| = 3x - 1$$

egyenletet!

Megoldás:

Ha $x \geq -2$, akkor

$$x + 2 = 3x - 1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = \frac{3}{2}$, ami teljesíti az $x \geq -2$ feltételt.

Ha $x < -2$, akkor

$$-x - 2 = 3x - 1,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = -\frac{1}{4}$, ami nem teljesíti az $x < -2$ feltételt.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

6. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\sqrt{x+2} = 2x - 11$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartomány $x \geq -2$.

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$x + 2 = (2x - 11)^2.$$

A nevezetes azonosság elvégzése után

$$x + 2 = 4x^2 - 44x + 121$$

adódik. Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$4x^2 - 45x + 119 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva $x_1 = \frac{17}{4}$, illetve $x_2 = 7$ adódik.

Ellenőrizzük a kapott eredményeket.

Ha $x = \frac{17}{4}$, akkor

az egyenlet bal oldala: $\sqrt{\frac{17}{4} + 2} = \frac{5}{2}$, az egyenlet jobb oldala: $2 \cdot \frac{17}{4} - 11 = -\frac{5}{2}$, így az $x = \frac{17}{4}$ nem megoldás.

Ha $x = 7$, akkor

az egyenlet bal oldala $\sqrt{7 + 2} = 3$, az egyenlet jobb oldal $2 \cdot 7 - 11 = 3$. Tehát $x = 7$ az egyetlen megoldása az egyenletnek.

Megjegyezzük, hogy az ellenőrzés mindenképpen szükséges volt, mert a megoldás során négyzetre emelést hajtottunk végre, ami nem ekvivalens átalakítás.

7. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$3^{x+1} + 3^{x+2} = 12$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 9 = 12.$$

Vezessük be az $a = 3^x$ jelölést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$3a + 9a = 12 \Rightarrow a = 1.$$

Visszahelyettesítve az $a = 3^x$ kifejezésbe azt kapjuk, hogy

$$1 = 3^x \Rightarrow 3^0 = 3^x,$$

amiből a szigorú monotonitás miatt $x = 0$ adódik.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

8. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{2^{x+3}}{2^{2x-1}} = \frac{4^{x-2}}{4^{2x+1}}$$

egyenletet!

Megoldás:

Felhasználva, hogy $4 = 2^2$, továbbá alkalmazva azt, hogy hatvány hatványozásakor az alapot a kitevők szorzatára emeljük, azt kapjuk, hogy

$$\frac{2^{x+3}}{2^{2x-1}} = \frac{2^{2x-4}}{2^{4x+2}}.$$

Azonos alapú hatványok osztásakor az alapot a kitevők különbségére emeljük, így

$$2^{-x+4} = 2^{-2x-6}.$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton, így

$$-x + 4 = -2x - 6,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = -10$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

9. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 10 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x + 10 = 0.$$

Vezessük be az $a = 2^x$ jelölést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 7a + 10 = 0 \Rightarrow a_1 = 2;\ a_2 = 5.$$

Visszahelyettesítve az $a = 2^x$ kifejezésbe egyrészt azt kapjuk, hogy

$$2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1,$$

másrészt

$$2^x = 5 \Rightarrow \lg 2^x = \lg 5 \Rightarrow x \cdot \lg 2 = \lg 5 \Rightarrow x = \frac{\lg 5}{\lg 2}.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmények megoldásai az eredeti egyenletnek is.

10. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Vezessük be az $a = 3^x$ jelölést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a_1 = 3;\ a_2 = -1.$$

Visszahelyettesítve az $a = 3^x$ kifejezésbe egyrészt azt kapjuk, hogy

$$3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1,$$

másrészt $3^x = -1$, ami nem lehetséges. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

11. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\lg(x-1) + \lg 2 = 1$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya:$]1;\infty[$. A logaritmus azonosságainak alkalmazásaival az egyenlet átalakítható:

$$\lg 2 \cdot (x-1) = \lg 10\,.$$

A logaritmus függvény szigorúan monoton, így

$$2x - 2 = 10 \Rightarrow 2x - 2 = 10 \Rightarrow x = 6.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

12. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\log_2(x-1)+\log_2 x \ =3$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya $]1;\infty[$. A logaritmus azonosságainak alkalmazásaival az egyenlet átalakítható:

$$\log_2 x\cdot(x-1)=\log 8\,.$$

A logaritmus függvény szigorúan monoton, így

$$x^2-x=10\Rightarrow x^2-x-8=0\Rightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{65}}{2};x_2=\frac{1-\sqrt{65}}{2}.$$

Mivel $x_1\leq 1$, ezért x_1 nem eleme az egyenlet értelmezési tartományának, így az nem megoldás. Az egyenlet egyetlen megoldása: $x=\frac{1-\sqrt{65}}{2}$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

13. feladat: Egy város lakóinak száma jól modellezhető a

$$P(t)=20\,000\cdot 2^{0{,}012t}$$

függvénnyel, ahol $P(0)$ a város lakóinak száma 2 000-ben.

a) Hányan laktak a városban 2 000-ben?
b) Hányan laktak a városban 2 015-ben?
c) Mikor lesz a város népessége 32 000 fő?

Megoldás:

a) 2 000-ben $P(0)=20\,000\cdot 2^0=20\,000$ fő lakott a városban.
b) 2 015-ben $P(15)=20\,000\cdot 2^{0{,}012\cdot 15}\approx 28\,322$ fő lakott a városban.
c) Keressük a $32\,000=20\,000\cdot 2^{0{,}012t}$ egyenlet megoldását.
   Az egyenlet mindkét oldalát osszuk 20 000-rel?

$$1{,}6=2^{0{,}012t}.$$

Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\lg 1{,}6=\lg 2^{0{,}012t}\Rightarrow \lg 1{,}6=0{,}012t\cdot\lg 2\Rightarrow 0{,}012t=\frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}2},$$

amiből azt kapjuk, hogy $t \approx 56{,}5$, tehát $2057 -$ben éri el a város lakossága a 32 000 főt.

14. feladat: Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságárusnál ugyanazt a magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár ötöde. Elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után 714 forintjuk marad. Mennyibe került a magazin, és mennyi pénze volt a lányoknak külön-külön a magazin megvásárlása előtt?

<u>Megoldás:</u>

Legyen a magazin ára x. Ekkor Anna pénze: $0{,}88x$, Zsuzsi pénze $\frac{4}{5}x = 0{,}8x$. A két lány pénzének összege:

$$0{,}88x + 0{,}8x,$$

így felírható az alábbi egyenlet:

$$0{,}88x + 0{,}8x = x + 714.$$

A bal oldalon elvégezve az összevonást azt kapjuk, hogy

$$1{,}68x = x + 714 \Rightarrow 0{,}68x = 714 \Rightarrow x = 1\,050,$$

tehát a magazin ára: 1 050 forint.

Annának $1\,050 \cdot 0{,}8 = 924$ forintja, Zsuzsinak $1\,050 \cdot 0{,}8 = 840$ forintja volt a magazin vásárlása előtt.

15. feladat: Elhelyeztünk $800\,000$ forintot egy bankba két évre kamatos kamatozású bankbetétbe. A bank a második évre a kamatot az első évihez képest 3%-kal emeli. A két év elteltével a pénzünk $907\,200$ forintra növekedett. Mennyi volt a kamat az első évben, illetve a második évben?

<u>Megoldás:</u>

Első évben a kamat legyen p%. Ekkor felírható az alábbi egyenlet:

$$800\,000 \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p+3}{100}\right) = 907\,200.$$

Az egyenlet mindkét oldalát osszuk el 800 000-el:

$$\left(1 + \frac{P}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p+3}{100}\right) = 1{,}134.$$

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$1+\frac{p+3}{100}+\frac{p}{100}+\frac{p^2+3p}{10\,000}=1{,}134.$$

Az egyenlet mindkét oldalából 1-et kivonva

$$\frac{p+3}{100}+\frac{p}{100}+\frac{p^2+3p}{10\,000}=0{,}134$$

adódik. Szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$100\cdot(p+3)+100\cdot p+p^2+3p=1\,340.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$100p+300+100p+p^2+3p=1\,340.$$

Az egyenletet nullára rendezve az alábbi egyenlethez jutunk:

$$p^2+203p-1\,040=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$p_{1,2}=\frac{-203\pm\sqrt{203^2+4\cdot 1\,040}}{2}=\frac{-203\pm 213}{2},$$

így $p_1=5$, illetve $p_2=-208$. Mivel $p>0$, ezért p=5, így az első évben 5%-os, a második évben 8%-os a kamat.

16. feladat: Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. Ha a számjegyek felcserélésével kapott számból kivonjuk az eredeti számot, akkor eredményül 18-at kapunk. Melyik ez a szám?

Megoldás:

A tízesek helyén álló számjegyet jelöljük x-szel. Ekkor elkészíthető az alábbi táblázat:

tízes	egyes	szám értéke
x	$8-x$	$10x+8-x=9x+8$
$8-x$	x	$10\cdot(8-x)+x=80-9x$

Felírható az alábbi egyenlet:

$$80-9x-(9x+8)=18.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$80 - 9x - 9x - 8 = 18.$$

Az egynemű tagokat összevonva

$$72 - 18x = 18$$

adódik. Tehát $18x = 54$, így $x = 3$. Tehát a keresett szám: 35.

<u>Gyakorló feladatok</u>

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{x}} = 1$$

egyenletet!

2. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$9^x - 8 \cdot 3^x + 15 = 0$$

egyenletet!

3. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{x - 2} = 2x - 5$$

egyenletet!

4 ALGEBRAI EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

Elméleti összefoglaló:

Az egyenlőtlenség két függvény összekapcsolása a $<, >, \geq, \leq$ relációs jelek valamelyikével:

$$f(x) < g(x), \qquad f(x) > g(x), \qquad f(x) \leq g(x), \qquad f(x) \geq g(x)$$

Az egyenlőtlenség megoldása során az f és g függvények értelmezési tartománya metszetének (közös részének) azon x elemeit keressük, amelyekre a két függvény helyettesítési értékeire a megadott reláció fennáll. Az egyenlőtlenség megoldása során is (csakúgy, mint az egyenletek megoldásánál) fontos figyelnünk arra, hogy mi az alaphalmaz és az egyenlőtlenség értelmezési tartománya.

<table>
<tr><th colspan="2">Egyenlőtlenségek megoldási módszerei</th></tr>
<tr><td>

Grafikus módszer:

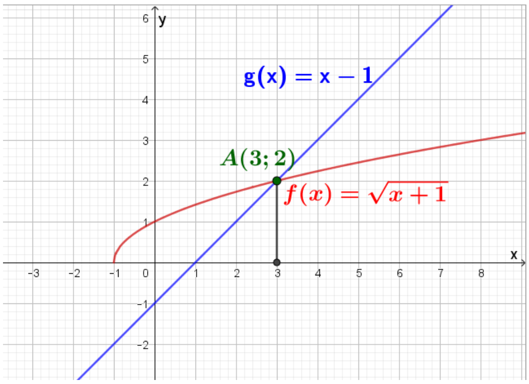
Az $f(x) < g(x)$(vagy a $>, \geq, \leq$ relációs jelekkel) egyenlőtlenség két oldalán lévő függvényeket ábrázoljuk és meghatározzuk a grafikonok közös pontjait (ha vannak). A grafikon alapján megvizsgáljuk, hogy az értelmezési tartománynak a metszéspont(ok) x koordinátáival (ha vannak) felosztott intervallumok közül melyekben „halad” az $f(x)$ függvény görbéje a $g(x)$ függvény görbéje alatt. Ezek az intervallumok adják az egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

</td><td>

$$\sqrt{x+1} < x - 1$$

Ábrázoljuk az

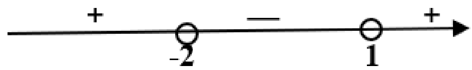
$f(x) = \sqrt{x+1}$ és a $g(x) = x - 1$ függvényeket.



Azt az intervallumot keressük, melyen az $f(x)$ függvény görbéje a g(x) függvény görbéje alatt „halad”. Azaz az argumentum azon értékeit, melyeknél $f(x)$ függvény értékei kisebbek lesznek a $g(x)$ függvény értékeitől. Az ábráról

</td></tr>
</table>

	könnyen leolvasható, hogy ilyen argumentumértékek az $x > 3$ halmaz elemei. Tehát az egyenlőtlenség megoldása a $]3;+\infty[$ halmaz.
Az egyenlőtlenség rendezése, mérlegelv alkalmazása: – Ha az egyenlőtlenség egyik oldaláról egy számot vagy ismeretlent tartalmazó kifejezést átviszünk a másik oldalra ellenkező előjellel, akkor az adottal ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk. – Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozzuk, illetve osztjuk ugyanazzal a pozitív számmal, ismeretlent tartalmazó kifejezéssel, mely az egyenlőtlenség értelmezési tartományán pozitív, akkor az egyenlőtlenség iránya változatlan marad. – Ha az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk, illetve osztjuk ugyanazzal a negatív számmal, ismeretlent tartalmazó kifejezéssel, mely az egyenlőtlenség értelmezési tartományán negatív, akkor az egyenlőtlenség iránya megfordul.	$$2(x-5)-4(3x-2) \leq 22-6x$$ A zárójelek felbontásával, majd összevonásokkal a $$-10x-2 \leq 22-6x$$ egyenlőtlenséghez jutunk. Innen az ismeretleneket tartalmazó kifejezéseket egyik oldalra, a számokat az egyenlőtlenség másik oldalára rendezzük: $$-10x+6x \leq 22+2$$ Akkor $$-4x \leq 24/:(-4)$$ Mivel negatív számmal osztottunk, így a relációs jel megváltozik: $$x \geq -6$$ A megoldás tehát a $]-6;+\infty[$ halmaz.

– Egyenlőtlenséget nullával vagy olyan kifejezésessel, mely az egyenlőtlenség értelmezési tartományán felvehet nulla értéket nem szorzunk, nem osztunk.	
Intervallum módszere: A módszert az $f(x) \lesseqgtr 0$ egyenlőtlenségek megoldására alkalmazzuk. 1. Meghatározzuk az egyenlőtlenség értelmezési tartományát. 2. Megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet. 3. Ábrázoljuk számegyenesen az egyenlőtlenség értelmezési tartományát és a 2. pontban nyert gyököket. 4. Meghatározzuk az $f(x)$ függvény előjelét mindegyik intervallumon, melyekre az értelmezési tartományt osztják a 2. pontban nyert gyökök. 5. Az eredeti egyenlőtlenségben lévő relációs jel függvényében kiválasztjuk az intervallumok közül a megfelelőt.	$$\frac{x-1}{x+2} < 0$$ Alkalmazzuk az intervallum módszerét: 1. az egyenlőtlenség értelmezési tartománya (minthogy a nevezőben nem lehet nulla): $]-\infty; -2[\,\cup\,]-2;\ +\infty[$(vagy $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$) 2. megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet: $\frac{x-1}{x+2} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0\ \Rightarrow x = 1$(benne van az értelmezési tartományban) 3. a kapott gyököt az értelmezési tartománnyal együtt ábrázoljuk a számegyenesen. Az üres kör a -1-nél azt jelzi, hogy a -1-es biztosan nem lesz benne a megoldáshalmazban, hiszen ezen a helyen a függvényérték pontosan 0 és nem kisebb attól. Hasonlóan a -2-ben nincs értelmezve a függvény. Az így kapott intervallumok mindegyikén megvizsgáljuk az $f(x)$ függvény előjelét (egyszerűen minden intervallumon kiválasztunk egy számot és megvizsgáljuk az $f(x)$ függvény helyettesítési értékének előjelét a kiválasztott x értékénél):  4. az eredeti egyenlőtlenség alapján olyan x értékeket keresünk, melyek mellett az $f(x)$ függvény csak negatív értékeket vesz fel.

<table>
<tr><td></td><td>Tehát az egyenlőtlenség megoldása a $]-2; 1[$ halmaz.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Néhány alapvető egyenlőtlenség</td></tr>
<tr><td>Lineáris egyenlőtlenségek:

ekvivalens átalakításokkal az alábbi alakok valamelyikére rendezhető egyenlőtlenségek:

$ax + b < 0,\;\; ax + b > 0,$

$ax + b \leq 0,\qquad ax + b \geq 0,$

ahol a és b konstans együtthatók, $a \neq 0$.</td><td>$$3x + 5 < 2x - 1$$
Rendezve az egyenlőtlenséget, kapjuk:
$$3x - 2x < -1 + 5 \Rightarrow x < 4$$</td></tr>
<tr><td>Törtes egyenlőtlenségek:

az ismeretlen a tört nevezőjében is előfordul.</td><td>$$\frac{x-1}{x+2} < 0$$
Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya (minthogy a nevezőben nem lehet nulla): $]-\infty; -2[\, \cup\,]-2;\, +\infty[$ (vagy $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$).

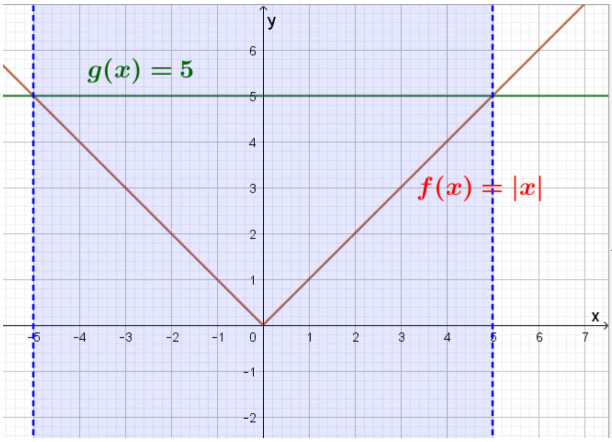
Fentebb megoldottuk az egyenlőtlenséget, felhasználva az intervallum módszerét.

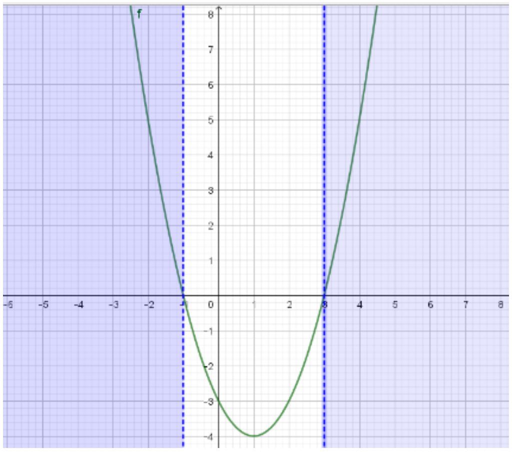
Most nézzünk egy másik megoldást:

A tört értéke akkor negatív, ha a számlálója és a nevezője ellentétes előjelű. Tehát

$$\begin{array}{c} x - 1 < 0 \\ \text{és} \\ x + 2 > 0 \\ \hline x < 1 \text{ és } x > -2 \end{array} \qquad \text{vagy} \qquad \begin{array}{c} x - 1 > 0 \\ \text{és} \\ x + 2 < 0 \\ \hline x > 1 \text{ és } x < -2 \end{array}$$
Ilyen x nincs

Összegezve az egyenlőtlenség megoldása tehát a $]-2; 1[$halmaz.</td></tr>
</table>

Abszolútértékes egyenlőtlenségek: $\lvert f(x)\rvert < g(x)$ (vagy a $>, \geq, \leq$ relációs jelekkel)	$\lvert x\rvert < 5 \Longrightarrow -5 < x < 5$ Ábrázoljuk az egyenlőtlenségben szereplő $f(x) = \lvert x\rvert$ és $g(x) = 5$ függvényeket.  Az ábrán is jól látható, hogy az $f(x) = \lvert x\rvert$ függvény grafikonja a $-5 < x < 5$ intervallumon van a $g(x) = 5$ egyenes alatt. Most oldjuk meg az $\lvert x\rvert > 5$ egyenlőtlenséget! Ekkor $f(x) = \lvert x\rvert$ függvény grafikonja akkor lesz $g(x) = 5$ egyenes fölött, ha $x < -5$ vagy $x > 5$
Másodfokú egyenlőtlenségek: ekvivalens átalakításokkal nullára rendezhetők úgy, hogy az egyenlőtlenség valamelyik oldalán másodfokú polinom áll.	$x^2 > 2x + 3$ Rendezve az egyenlőtlenséget $x^2 - 2x - 3 > 0$ A megoldást a grafikus módszer segítségével keressük. Ábrázoljuk az $f(x) = x^2 - 2x - 3$ függvényt, majd a grafikonról leolvassuk, hogy

	milyen x értékekek mellett lesznek a függvényértékek pozitívak. Először megkeressük a zérushelyeket, azaz megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet. $$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$ Tehát $x_1 = -1, x_2 = 3$ pontokban metszi az x -tengelyt a függvény grafikonja. A parabola felfelé nyíló ($a = 1 > 0$).  Amint az ábra is mutatja a függvény akkor vesz fel pozitív értékeket (a grafikon akkor van az x -tengely fölött), ha $x < -1$ és $x > 3$. ($x = -1$ és $x = 3$ argumentumokhoz tartozó függvényérték pontosan nulla, ami a feladat értelmében nem lehetséges.) Tehát a megoldásunk a $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$ halmaz.
Négyzetgyökös egyenlőtlenségek: $\sqrt{f(x)} < g(x)$ (vagy a $>, \geq, \leq$ relációs jelekkel)	$$\sqrt{x} < 2$$ Az egyenlőtlenség értelmezés tartománya (négyzetgyök függvény miatt): $D_f = [0; +\infty[$ Az értelmezési tartomány bármely elemére az $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = 2$ függvények pozitív

	értékeket vesznek fel. Így négyzetre emelhető mindkét oldal úgy, hogy a relációs jel nem változik. Ekkor $$x < 4.$$ Figyelembe véve, hogy csak nemnegatív x értékek jöhetnek szóba, a megoldásunk a $[0; 4[$ halmaz. *Megjegyezzük*, hogy négyzetre emeléssel hamis megoldáshoz is juthatunk, mivel az nem ekvivalens átalakítás! Például: $$\sqrt{x} > -2$$ Négyzetre emelve mindkét oldalt $$x > 4$$ Viszont az egyenlőtlenségnek nem csak a 4-től nagyobb valós számok a megoldásai, hiszen bármilyen nemnegatív valós szám négyzetgyöke nagyobb bármilyen negatív számtól. Tehát ekkor a megoldásunk a $[0; +\infty[$ halmaz.
Exponenciális egyenlőtlenségek: $$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$ (vagy a $<, \geq, \leq$ relációs jelekkel) 1. Ha $a > 1$, akkor $$f(x) > g(x)$$ (a relációs jel nem változik) 2. Ha $0 < a < 1$, akkor $$f(x) < g(x)$$ (a relációs jel megváltozik)	1. $2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2$ Az $f(x) = 2^x$ függvény szigorúan monoton növekvő $(a = 2 > 1)$, ezért $x > 2$. Tehát a megoldás a $]2; +\infty[$ halmaz. 2. $0{,}7^{x-2} > 0{,}49 \Leftrightarrow 0{,}7^{x-2} > 0{,}7^2$ Az $f(x) = 0{,}7^x$ függvény szigorúan monoton csökkenő $(0 < a = 0{,}7 < 1)$, ezért $$x - 2 < 2 \Rightarrow x < 4$$ Tehát a megoldás a $]-\infty; 4[$ halmaz.

Logaritmikus egyenlőtlenségek: $log_a f(x) < log_a g(x)$ Figyelembe véve a logaritmusfüggvény értelmezési tartományát az egyenlőtlenség megoldása azonos a következő egyenlőtlenségrendszer megoldásával:	
1. Ha $a > 1$, akkor $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ (a relációs jel nem változik)	1. $log_2(x-5) < 3 \Leftrightarrow log_2(x-5) < log_2 2^3$ Itt felhasználtuk a logaritmus $log_a a^n = n$ tulajdonságát. A $k(x) = log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekvő ($a = 2 > 1$), ezért $\begin{cases} x-5 < 8 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 13 \\ x > 5 \end{cases}$ Tehát a megoldás a $]5; 13[$ halmaz.
2. Ha $0 < a < 1$, akkor $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ (a relációs jel megváltozik)	2. $log_{\frac{1}{2}}(x-5) < 3 \Leftrightarrow log_{\frac{1}{2}}(x-5) < log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$ A $l(x) = log_{\frac{1}{2}} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő ($0 < a = \frac{1}{2} < 1$), ezért $\begin{cases} x-5 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5\frac{1}{8} \\ x > 5 \end{cases}$ Tehát a megoldás a $\left]5\frac{1}{8}; +\infty\right[$ halmaz.

Megjegyezzük, hogy egyenlőtlenségek megoldásának (csakúgy, mint az egyenletek megoldásának) ellenőrzése, minden esetben fontos. Különösen akkor, amikor nem ekvivalens átalakításokkal jutunk el a megoldáshoz.

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\frac{3x+5}{7}+\frac{10-3x}{5}<\frac{2x+7}{3}$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát beszorozva a nevezőben lévő számok legkisebb közös többszörösével, azaz 105-tel és elvégezve az egyszerűsítéseket, a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$15\cdot(3x+5)+21\cdot(10-3x)<35\cdot(2x+7).$$

A zárójelek felbontása és az összevonások elvégzése a

$$-18x+285<70x+245$$

egyenlőtlenség megoldásához vezet.

$$-88x<-40$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát -88-cal osztva a relációs jel megváltozik. Így a megoldásunk

$$x>\frac{40}{88}$$

Azaz a valós számok halmazának a $\left]\frac{40}{88};+\infty\right[$ részhalmaza (azaz az $\left]\frac{5}{11};+\infty\right[$ halmaz).

Mivel az egyenlőtlenség megoldása során ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott halmaz megoldása az eredeti egyenlőtlenségnek.

2. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{1}{x-2}\leq 1$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

1. megoldás:

Feltételezzük, hogy $x-2>0$ (mivel a kifejezés a nevezőben van, így 0 nem lehet). Ekkor beszorozva az egyenlőtlenséget ezzel a pozitív kifejezéssel a relációs jel nem változik és az

$$1 \leq x - 2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Tehát feladatunk az

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 1 \leq x - 2 \end{cases}$$

egyenlőtlenségrendszer megoldása.

$$\begin{cases} x > 2 \\ 3 \leq x \end{cases} \Rightarrow x \geq 3.$$

Ha $x - 2 < 0$, akkor beszorozva az egyenlőtlenséget ezzel a negatív kifejezéssel a relációs jel megváltozik és az

$$1 \geq x - 2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Tehát feladatunk az

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ 1 \geq x - 2 \end{cases}$$

egyenlőtlenségrendszer megoldása.

$$\begin{cases} x < 2 \\ 3 \geq x \end{cases} \Rightarrow x < 2.$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása a $]-\infty; 2[\, \cup [3; +\infty[$ halmaz. (Ellenőrzéssel ez könnyen belátható: vegyünk halmazba tartozó és nem tartozó elemeket, majd azokat helyettesítsük az eredeti egyenlőtlenségbe az *x* helyére és vizsgáljuk meg, hogy a kiválasztott *x* értékek mellett igaz lesz-e az egyenlőtlenség.)

2. megoldás:

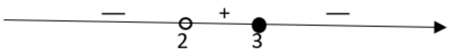
Egy oldalra rendezve az egyenlőtlenség két oldalán lévő kifejezéseket, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x-2} - 1 \leq 0.$$

Innen

$$\frac{1-(x-2)}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x-2} \leq 0.$$

A kapott egyenlőtlenség megoldásához alkalmazzuk az intervallum módszert. Megkeressük az $f(x) = \frac{3-x}{x-2}$ függvény zérushelyeit és az értelmezési tartományát. Zérushely: $x = 3$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Az értelmezési tartomány és a zérushely a számegyenest három intervallumra osztja. Ezek mindegyikén vizsgáljuk az $f(x)$ függvény előjelét (ha $x > 3$, például $x = 4$, akkor $f(4) = \frac{-1}{2} < 0$).



(Emlékeztetőül: 2-nél az üres kör azt jelzi, hogy ilyen x értéknél nincs értelmezve a függvény, a 3-nál a festett kör pedig azt, hogy ezen a helyen értelmezve van a függvény és az egyenlőtlenség is fennáll.)

A feladat feltétele alapján azokat az intervallumokat keressük, ahol $f(x) \leq 0$. Ez pedig a $]-\infty; 2[\cup [3; +\infty[$ halmaz.

3. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 20x} \leq 0$$

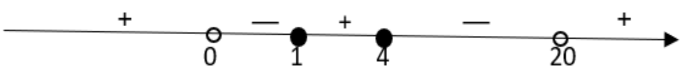
egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Az intervallum módszerét alkalmazva megkeressük az $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-20x}$ függvény zérushelyeit és értelmezési tartományát, majd azokat ábrázoljuk a számegyenesen. Minthogy a számlálóban és a nevezőben is másodfokú polinomok vannak, ezért a szükséges adatok, majd a függvény előjelének vizsgálata megkönnyítése céljából érdemes szorzattá alakítani a számlálót és a nevezőt is (amennyiben a polinomoknak vannak valós gyökei) (gyöktényezős felbontás).

$$f(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-4)}{x \cdot (x-20)}.$$

Innen már könnyen látható, hogy a zérushelyek az $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$ helyek, valamint az értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0; 20\}$. Vizsgáljuk a függvény előjelét a kapott intervallumokon:



Számunkra megfelelők azok az intervallumok, ahol az $f(x)$ függvényértékek nempozitív. Ez pedig a $]0; 1] \cup [4; 20[$ halmaz.

4. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$|6 - 3x| \geq 3$$

egyenlőtlenséget!

<u>Megoldás:</u>

Legyen $a = 6 - 3x$. Akkor azt kapjuk, hogy

$$|a| \geq 3$$

Az egyenlőtlenség igaz, ha $a \geq 3$ vagy $a \leq -3$. Visszahelyettesítve

$$6 - 3x \geq 3 \quad \text{vagy} \quad 6 - 3x \leq -3$$

$$-3x \geq -3 \quad \text{vagy} \quad -3x \leq -9$$

$$x \leq 1 \quad \text{vagy} \quad x \geq 3$$

Így az egyenlőtlenség megoldása a $]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ halmaz.

5. feladat: Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, mely eleget tesz a

$$\left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{100} \quad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenségnek!

<u>Megoldás:</u>

Bevezetjük a következő jelölést: $a = \frac{2n}{n+3} - 2$. Akkor először meg kell oldanunk az

$$|a| < \frac{1}{100}$$

egyenlőtlenséget. Ez az egyenlőtlenség akkor lesz igaz, ha

$$\begin{cases} a < \dfrac{1}{100} \\ a > -\dfrac{1}{100} \end{cases}$$

Visszahelyettesítve:

$$\begin{cases} \dfrac{2n}{n+3} - 2 < \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{2n}{n+3} - 2 > -\dfrac{1}{100} \end{cases}$$

Mivel $n + 3 > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), ezért mindkét egyenlőtlenséget beszorozva $n + 3$ –mal, a relációs jel nem változik.

$$\begin{cases} 2n - 2 \cdot (n+3) < \dfrac{1}{100} \cdot (n+3) \\ 2n - 2 \cdot (n+3) > -\dfrac{1}{100} \cdot (n+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 < \dfrac{1}{100} \cdot (n+3) \\ -6 > -\dfrac{1}{100} \cdot (n+3) \end{cases}$$

100-zal szorozva mindkét egyenlőtlenséget, kapjuk:

$$\begin{cases} -600 < n + 3 \\ -600 > -n - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n > -603 \\ n > 597 \end{cases}$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldása az $]597; +\infty[$ halmaz. Mivel csak ekvivalens átalakításokat végeztünk a megoldás keresése során, ezért a kapott halmaz megoldása az eredeti egyenlőtlenségnek.

Így a legkisebb pozitív egész szám, melyre teljesül az egyenlőtlenség az $n = 598$.

6. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - x - 6 < 0$

b) $x^2 - x + 6 \leq 0$

c) $-x^2 - x - 2 \leq 0$

d) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Megoldás:

Mindegyik esetben ábrázoljuk vázlatosan az egyenlőtlenség bal oldalán lévő másodfokú függvényeket. Ehhez elegendő megkeresnünk az egyes függvények zérushelyeit, azaz megoldanunk az $f(x) = 0$ egyenletet, valamint tisztázni, hogy a parabola felfelé vagy lefelé „nyíló” lesz.

Az a) és d) feladatok esetében az utóbbi egyenletnek van megoldása, azaz a függvények grafikonjai metszik az x-tengelyt.

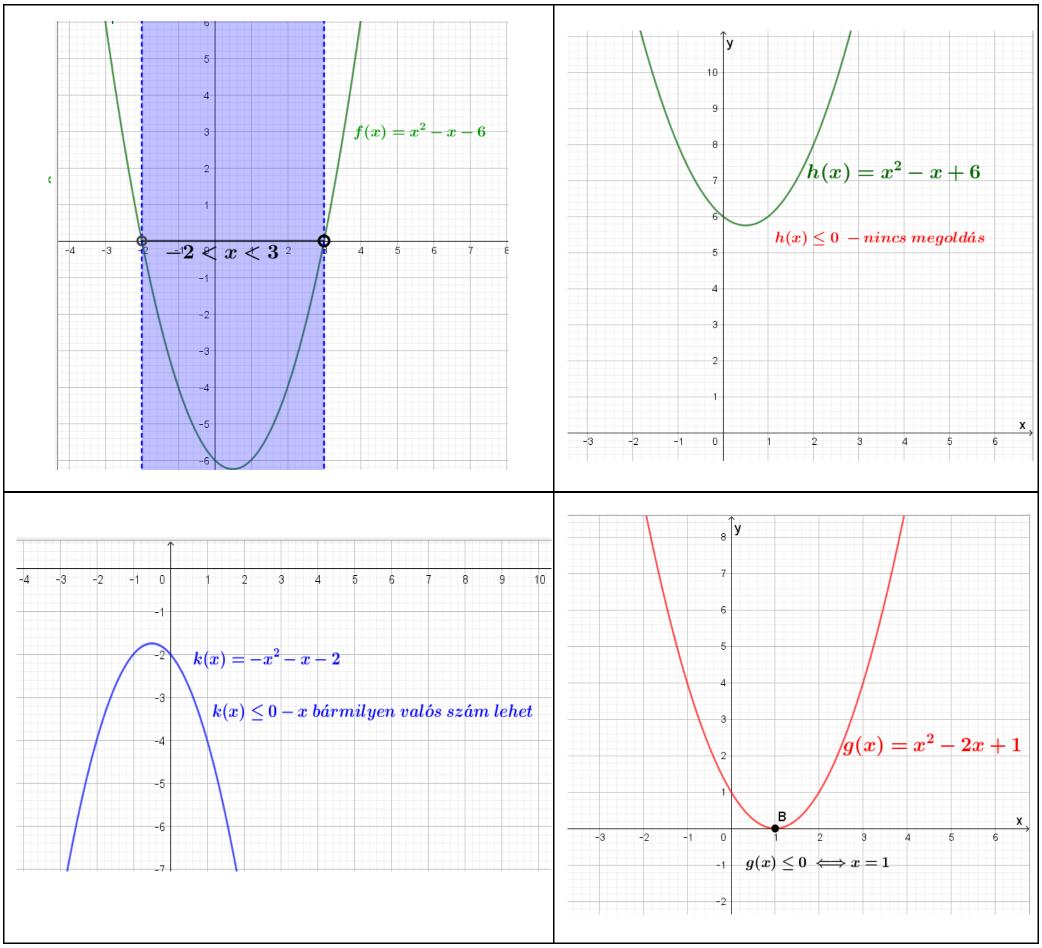
Az a) feladatban minden olyan intervallum megfelelő, ahol a parabola az x-tengely alatt lesz, azaz, ahol a függvényértékek negatívak: ez a $]-2; 3[$intervallumon teljesül. ($x = -2, x = 3$ esetén a függvényérték pontosan 0, ami adott esetben nem lehetséges.)

A d) feladatban azt a halmazt keressük, ahol a függvényértékek nempozitívak (a parabola az x-tengely alatt van vagy metszi azt). Amint az ábra is mutatja ez egyedül az $x = 1$ helyen teljesül. Tehát az egyenlőtlenség megoldása az $\{1\}$ egyelemű halmaz.

A b) és c) feladatok esetében az $f(x) = 0$ egyenletnek nincs megoldása, azaz a függvények grafikonjai nem metszik az x-tengelyt.

A b) feladatban a parabola teljes egészében az x-tengely fölött van, így a függvényértékek sehol sem lesznek negatívak. Tehát az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

A c) feladatban a parabola teljes egészében az x-tengely alatt van, így a függvényértékek mindenhol negatívak. Tehát az egyenlőtlenség megoldása a valós számok halmaza.



7. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{27}$

b) $3^{x-1} > 4$

<u>Megoldás:</u>

a) Felhasználva, hogy $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$, az

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Exponenciális egyenlőtlenség lévén a megoldáshoz meg kell vizsgálnunk az $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény monotonitását. Mivel ez egy szigorúan monoton csökkenő függvény $\left(0 < \frac{1}{3} < 1\right)$, így, ha az argumentum kisebb, akkor a függvény helyettesítési értéke nagyobb, tehát

$$2x + 1 \geq 3$$

(a relációs jel megváltozik). Innen

$$x \geq 1.$$

Tehát a megoldáshalmaz az $[1; +\infty[$ halmaz.

b) Első lépésben az egyenlőtlenség minkét oldalán azonos alapú exponenciális függvényeket kell konstruálnunk. Felhasználva, hogy $a^{log_a b} = b,$ a 4 megadható a

$$3^{\log_3 4} = 4$$

módon. Így az eredeti egyenlőlenség ekvivalens a

$$3^{x-1} > 3^{\log_3 4}$$

egyenlőtlenséggel.

Az $f(x) = 3^x$ függvény szigorúan monoton növekvő függvény $(3 > 1)$, így, ha az argumentum nagyobb, akkor a függvény helyettesítési értéke is nagyobb, tehát

$$x - 1 > \log_3 4$$

(a relációs jel nem változik). Innen

$$x > \log_3 4 + 1.$$

Tehát a megoldáshalmaz az $]\log_3 4 + 1; +\infty[$ halmaz.

8. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\log_3(x+3) > \log_3(2x)$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) < -2$

<u>Megoldás:</u>

a) Logaritmikus egyenlőtlenség révén a benne szereplő $f(x) = \log_3 x$ függvény monotonitását és értelmezési tartományát is vizsgálnunk kell. Ez egy szigorúan monoton növekvő függvény (a logaritmus alapja $a = 3 > 1$), így relációs jel nem fog megváltozni. Továbbá, mivel az $f(x) = \log_3 x$ függvény csak akkor értelmezett, ha $x > 0$, ezért a következő egyenlőtlenségrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ 2x>0 \\ x+3 > 2x \end{cases}$$

Az egyenlőtlenség-rendszer ekvivalens az

$$\begin{cases} x>-3 \\ x>0 \\ x<3 \end{cases}$$

egyenlőtlenség-rendszerrel.

A három egyenlőtlenség megoldáshalmazának metszete adja az eredeti egyenlőtlenség megoldását, ami a $]0;3[$ halmaz.

b) Felhasználva, hogy $log_a a^n = n$, az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

egyenlőtlenséggel. Mivel az $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő függvény (a logaritmus alapja $0 < a = \frac{1}{3} < 1$), így relációs jel megváltozik. Továbbá, mivel az $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ függvény csak akkor értelmezett, ha $x > 0$, ezért a következő egyenlőtlenségrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{cases} 3x-1>0 \\ 3x-1 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \end{cases}$$

Felhasználva, hogy $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}} = 9$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} 3x > 1 \\ 3x > 9 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > \frac{10}{3} \end{cases}$$

Az egyenlőtlenségek megoldáshalmazainak metszete a $\left]\frac{10}{3}; +\infty\right[$ halmaz, ami egyben az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza is.

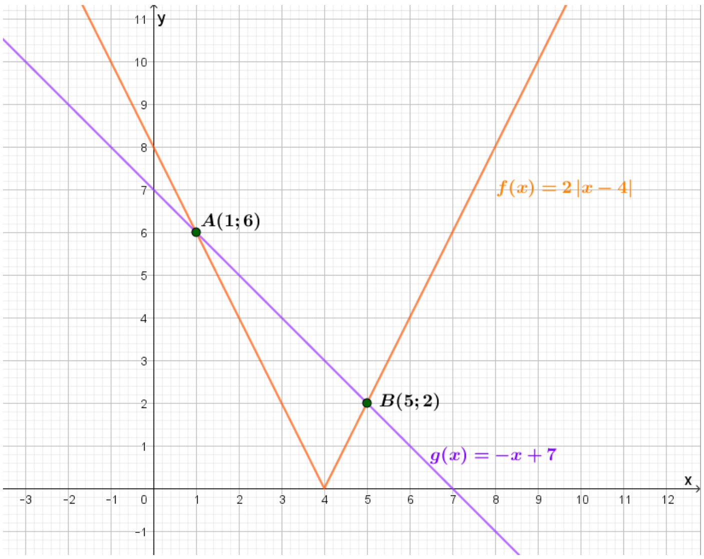
9. feladat: Oldjuk meg grafikusan a valós számok halmazán a

$$2 \cdot |x - 4| \geq -x + 7$$

egyenlőtlenséget!

<u>Megoldás:</u>

Közös koordinátarendszerben ábrázoljuk az egyenlőtlenség két oldalán szereplő függvényeket és megkeressük a grafikonok metszéspontjait (amennyiben vannak).



Amint az ábra is mutatja a függvénygrafikonok két pontban, az *A* és *B* pontokban metszik egymást. Ezen pontok *x* koordinátái az értelmezési tartományt három intervallumra osztják: $]-\infty; 1]$, $[1; 5]$, $[5; +\infty[$. Ezek közül azok felelnek meg, melyeken az $f(x)$ függvény grafikonja a $g(x)$ függvény grafikonja felett „halad". A „≥" relációs jel miatt azon *x* értékek is megfelelnek nekünk, ahol a két függvény értékei megegyeznek (azaz, ahol a grafikonok azon pontjainak x koordinátái, ahol metszik egymást). Így a megoldásunk a $]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$ halmaz.

10. feladat: Egy labdát függőlegesen feldobtak $96 \left[\frac{m}{s}\right]$ kezdősebességgel. A labda t másodperc múlva $s(t) = 96t - 16t^2$ méter távolságra lesz a talajtól. Milyen t idő alatt lesz a labda több mint 128 méter távolságra a talajtól?

Megoldás:

A kérdés megválaszolásához meg kell oldanunk a $96t - 16t^2 > 128$ egyenlőtlenséget, mely ekvivalens a

$$96t - 16t^2 - 128 > 0$$

egyenlőtlenséggel.

Elosztva az egyenlőtlenséget -16-tal, az egyenlőtlenség ekvivalens a

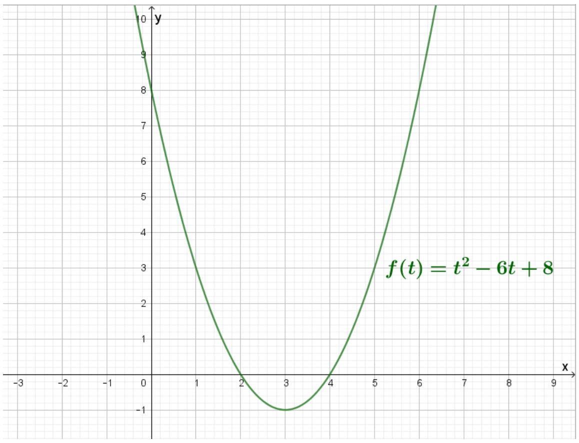
$$t^2 - 6t + 8 < 0$$

egyenlőtlenséggel.

Az $f(t) = t^2 - 6t + 8$ függvény zérushelyei (azaz az $f(t) = 0$ egyenlet megoldásai) a $t_1 = 4$, $t_2 = 2$ helyek. Tehát a felfelé „nyíló” parabolánk metszi a vízszintes tengelyt ezeken a helyeken.

Az ábráról könnyen leolvasható, hogy egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $]2; 4[$halmaz, hiszen ilyen t mellett az $f(t)$ függvényünk értékei negatívak (ezen az intervallumon van a parabola a vízszintes tengely alatt).

Tehát a labda 2 és 4 másodperc között lesz több mint 128 méter távolságra a talajtól.



Gyakorló feladatok

1. feladat: Oldja meg a valós számok halmazán az

$$3^{-x^2+5x-8} < \frac{1}{9}$$

egyenlőtlenséget!

2. feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{3x+1}{2x-5} > 2$$

egyenlőtlenséget!

3. feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a

$$log_3(3-x) + log_3(x+1) < 1$$

egyenlőtlenséget!

5 EGYENLETRENDSZEREK

Elméleti összefoglaló:

Ha meg kell találnunk két vagy több egyenlet közös megoldását, akkor azt mondjuk, hogy az egyenletek által alkotott *egyenletrendszert* kell megoldanunk.	$\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=11 \end{cases}$ −kétismeretlenes két egyenletből álló, elsőfokú egyenletrendszer.
Az *egyenletrendszer megoldása* az a szám n-es (n −az ismeretlenek száma), mely minden egyenletnek megoldása. *Megoldani az egyenletet* annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása.	Az $(5;1)$ számpár az egyetlen megoldása az egyenletrendszernek, azaz $x=5, y=1.$ Ellenőrzés: helyettesítsük az ismeretlenek ezen értékeit az egyenletrendszerbe a megfelelő helyekre: $\begin{cases} 5-1=4 \\ 2\cdot 5+1=11 \end{cases}$

Megjegyezzük, hogy az egyenletrendszer megoldása előtt tisztázni kell az egyenletrendszer ún. „kiindulási” halmazát. Azaz azt a halmazt, melynek elemei között keressük az egyenletrendszer megoldását.

Például az

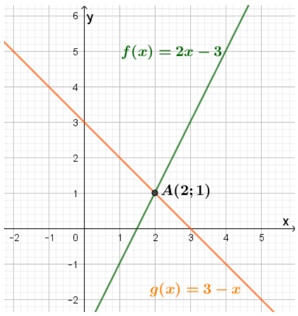
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

egyenletrendszer „kiindulási” halmaza a $\{(x,y)|x\neq 0, y\neq 0\}$ halmaz.

A következőkben áttekintjük az egyenletrendszer néhány megoldási módszerét. Az egyes módszereket kétismeretlenes, két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásával mutatjuk be.

Az egyenletrendszer megoldásának módjai	
Behelyettesítő módszer: • Az egyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent. • Az ismeretlenre kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe a megfelelő helyre. • Megoldjuk az egyismeretlenes egyenletet, ezzel megkapjuk az egyik ismeretlent. • Ezt az értéket visszahelyettesítjük a másik egyenletbe vagy az első lépésben kapott kifejezésbe és meghatározzuk a másik ismeretlent.	$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ Az első egyenletből kapjuk, hogy $y = 2x - 3$. Az y-ra nyert kifejezést behelyettesítjük a második egyenletbe: $x + 2x - 3 = 3.$ Innen kapjuk, hogy $x = 2$. Akkor $y = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$ Tehát az egyenletrendszer megoldása a $(2; 1)$ számpár.
Egyenlő együtthatók módszere: • Az egyenletek mindkét oldalát olyan alkalmas, nullától különböző számmal szorozzuk meg, hogy az egyik ismeretlen együtthatói a két egyenletben egyenlők vagy egymás ellentettjei legyenek. • Ha az így kapott egyenleteket kivonjuk vagy összeadjuk, akkor olyan egyenletet kapunk, ami már csak egy ismeretlent tartalmaz. Ezt megoldva megkapjuk az egyik ismeretlent. • A kapott értéket az egyik egyenletbe visszahelyettesítve megkapjuk a másik ismeretlent.	$\begin{cases} -3x + 4y = -14 \\ 2x + 6y = 18 \end{cases}$ Az első egyenletet 2-vel, a másodikat pedig 3-mal szorozva az egyes egyenletekben az x együtthatói ellentett számok lesznek. $\begin{cases} -6x + 8y = -28 \\ 6x + 18y = 54 \end{cases}$ Összeadva a két egyenletet a következő egyenlethez jutunk: $26y = 26$ Innen $y = 1$. A kapott értéket behelyettesítve első egyenletbe, kapjuk, hogy $x = 6$. Az egyenletrendszer megoldása tehát a $(6; 1)$ számpár.

Megjegyezzük, hogy ha több egyenletünk van több ismeretlennel, illetve az egyenletrendszer már nem elsőfokú, akkor az egyes egyenletek ekvivalens átalakításaival, valamint a módszereket felváltva alkalmazva arra törekszünk, hogy fokozatosan olyan egyenlethez jussunk, amelyben már csak egy ismeretlen szerepel.

Grafikus módszer: Az egyenletrendszert úgy rendezzük (ekvivalens átalakításokat végezve), hogy eljussunk egy olyan egyenletrendszerig, melynek egyenleteit könnyen tudjuk ábrázolni a derékszögű-koordinátarendszerben. Majd megkeressük a kapott görbék metszéspontját (metszéspontjait). A pont(ok) koordinátái adják az egyenletrendszer megoldását.	$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ Az adott egyenletrendszer ekvivalens a következővel: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3 - x \end{cases}$ Mindkét egyenlet egy-egy egyenes egyenlete. Ábrázoljuk őket egy koordináta-rendszerben:  Ezek az egyenesek egy pontban metszik egymást, melynek koordinátái (2;1), ami egyben az egyenletrendszer megoldása is.

Természetesen a grafikus módszert nem minden esetben tudjuk könnyen alkalmazni. Előfordulhat, hogy az egyenletrendszer ekvivalens átalakításával jutunk el olyan egyenletrendszerig, melynek egyenleteit könnyedén tudjuk ábrázolni, és így a megoldást is könnyen megtaláljuk a grafikus módszer segítségével.

1. feladat: Az egyenletrendszerek megoldása nélkül, állapítsuk meg, hány megoldásuk van!

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 10y = 12 \\ 6x + 15y = 10 \end{cases}$

<ins>Megoldás:</ins>

a) Könnyen látható, hogy a második egyenlet az első egyenlet kétszerese. Vagyis a két egyenlet olyan egyenesek egyenletei, melyek egybeesnek.

$$\begin{cases} y = 2 - \dfrac{2}{3}x \\ y = 2 - \dfrac{2}{3}x. \end{cases}$$

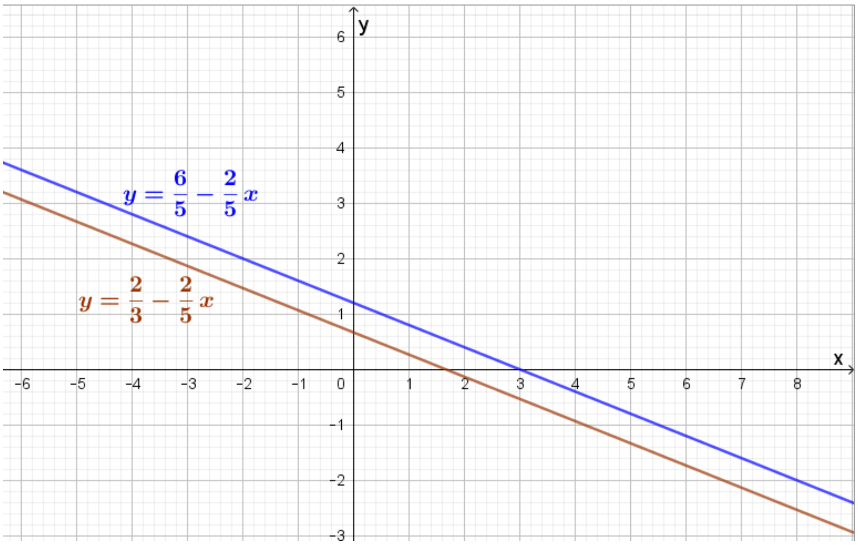
Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Az egyenletrendszer általános megoldásának megadásához vezessük be az $x = t$ jelölést, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor $y = 2 - \frac{2}{3}t$. A megoldáshalmaz a $\left\{\left(t, 2 - \frac{2}{3}t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$ halmaz.

Egy konkrét megoldása például $t = 3$ mellett a $(3, 0)$ számpár.

b) Ekvivalens átalakításokat végezve, kapjuk:

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{5} - \dfrac{2}{5}x \\ y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{5}x. \end{cases}$$

A kapott lineáris függvények grafikonjai olyan egyenesek, melyek meredeksége azonos: $m = -\frac{2}{5}$. Ez azt jelenti, hogy az egyenesek párhuzamosak, tehát sehol sem metszik egymást.



Ennélfogva az egyenletrendszernek nincs megoldása.

2. feladat: Oldjuk meg az

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{2} - \dfrac{b+4}{3} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{a-1}{5} + \dfrac{b+4}{2} = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Ekvivalens átalakításokat végzünk oly módon, hogy az első és második egyenleteket rendre megszorozzuk a nevezőkben lévő számok legkisebb közös többszörösével: az első egyenletet így 6-tal, a másodikat pedig 10-zel.

$$\begin{cases} 6 \cdot \dfrac{a-1}{2} - 6 \cdot \dfrac{b+4}{3} = 6 \cdot \dfrac{1}{6} \\ 10 \cdot \dfrac{a-1}{5} + 10 \cdot \dfrac{b+4}{2} = 10 \cdot \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

A következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} 3 \cdot (a-1) - 2 \cdot (b+4) = 1 \\ 2 \cdot (a-1) + 5 \cdot (b+4) = 1 \end{cases}$$

Elvégezve a zárójelek felbontását és az összevonásokat, kapjuk:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 12 \\ 2a + 5b = -17 \end{cases}$$

Eljutottunk egy elsőfokú, kétismeretlenes, két egyenletből álló egyenletrendszerhez, melynek megoldásához a fentebb bemutatott módszerek bármelyikét tudjuk alkalmazni.

Ha az első egyenletet megszorozzuk 2-vel, a másodikat pedig -3-mal, majd összeadjuk az egyenleteket a

$$-19b = 75$$

egyismeretlenes egyenlethez jutunk. Innen $b = -\frac{75}{19}$.

A kapott eredményt visszahelyettesítjük bármelyik, az ekvivalens átalakítások során nyert egyenletrendszer valamelyik egyenletébe (vagy akár az eredeti egyenletbe).

$$3 \cdot a - 2 \cdot \left(-\frac{75}{19}\right) = 12.$$

Megoldva ezt a lineáris egyenletet $a = \frac{26}{19}$.

Az egyenletrendszer megoldása tehát a $\left(\frac{26}{19};\ -\frac{75}{19}\right)$ számpár.

A megoldás helyessége könnyen ellenőrizhető, visszahelyettesítve a kapott értékeket az egyenletrendszer egyenleteibe a megfelelő helyekre.

3. feladat: Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 25 \\ x + y = 9. \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletben egy nevezetes azonosságot fedezhetünk fel, mégpedig az

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

azonosságot. Esetünkben $a = x, b = 3y$. Ezt felhasználva a következő, az eredetivel ekvivalens egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} (x-3y)^2 = 25 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

A kapott egyenletrendszer megoldásához többféle úton juthatunk. Az egyik lehetőség, a helyettesítési módszer alkalmazása: a második egyenletből kifejezve valamelyik ismeretlent, az arra kapott kifejezést behelyettesítjük az első egyenletbe. Így egyismeretlenes másodfokú egyenlethez jutunk, azaz a következő egyenlethez:

$$(11 - y - 3y)^2 = 25 \Leftrightarrow (11 - 4y)^2 = 25.$$

Ahhoz, hogy az egyenlőség teljesüljön, $11 - 4y$ értéke olyan szám kell, hogy legyen, melynek négyzete 25-tel egyenlő. Ennélfogva

$$11 - 4y = 5 \text{ vagy } 11 - 4y = -5.$$

Megoldva minkét egyenletet azt kapjuk, hogy $y_1 = \frac{3}{2}$ vagy $y_2 = 4$. Az y-ra nyert értékeket egyenként behelyettesítjük az egyenletrendszer második egyenletébe, meghatározzuk a x értékeit:

$$\text{I.}\begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} \\ x_1 = 11 - \frac{3}{2} = \frac{19}{2} \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} y_2 = 4 \\ x_2 = 11 - 4 = 7 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásai tehát a $\left(\frac{19}{2};\frac{3}{2}\right)$ és a $(7;4)$ számpárok.

4. feladat: Oldjuk meg az

$$\begin{cases} \lg(x+y) = 2\lg x \\ \lg x = \lg 2 + \lg(y-1). \end{cases}$$

egyenletrendszert!

<u>Megoldás:</u>

Minthogy az egyenletendszer egyenleteiben logaritmusfüggvények találhatók, ezért először is tisztáznunk kell a „kiindulási” halmazt. Az $y = \lg x$ logaritmusfüggvény értelemzési tartománya az $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ halmaz. Ezért a keresett (x, y) számpár(ok)ra teljesülnie kell, hogy

$$\begin{cases} x + y > 0 \\ x > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$$

Innen az következik, hogy az egyenletrendszer megoldása(i) a következő halmaz eleme(i): $\{(x, y) | x > 0, y > 1\}$.

Felhasználva a szám logaritmusára vonatkozó alapazonosságokat (lásd az 1. fejezetet), az adott egyenletrendszer ekvivalens a következővel:

$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg\ x^2 \\ \lg x = \lg(2(y-1)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x^2 \\ x = 2(y-1) \end{cases}$$

Az utolsó egyenletrendszer második egyenletében már ki van fejezve az x. Ezt helyettesítsük az első egyenletbe:

$$2(y-1) + y = (2(y-1))^2.$$

Elvégezve a hatványozást és rendezve az oldalakat kapjuk a következő másodfokú egyenletet:

$$4y^2 - 11y + 6 = 0.$$

Ezt megoldva $y_1 = 2$, $y_2 = 0{,}75$. Figyelembe véve a „kiindulási halmazt” y ezen két lehetséges értéke közül nekünk csak az $y_1 = 2$ felel meg. Ennélfogva $x = 2$. Tehát az egyenletrendszer megoldása a (2;2) számpár.

5. feladat: Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x + 3^{y+2} = 30 \\ 2x + 3^y = 9. \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Felhasználva az 1. fejezetben bemutatott hatványazonosságokat, az egyenletrendszer ekvivalens lesz a következővel:

$$\begin{cases} x + 3^y \cdot 9 = 30 \\ 2x + 3^y = 9 \end{cases}$$

A második egyenletből $3^y = 9 - 2x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe, a következő egyenletet kapjuk:

$$x + 9 \cdot (9 - 2x) = 30.$$

Az utóbbi egyenlet megoldása: $x = 3$. Akkor $3^y = 9 - 2 \cdot 3$, azaz $3^y = 3$. Tehát $y = 1$. Az egyenletrendszer megoldása így a (3;1) számpár.

6. feladat: Hány megoldása van az

$$\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0? \end{cases}$$

egyenletrendszernek?

Megoldás:

Ha az első egyenletet megszorozzuk 2-vel, majd összeadva a két egyenletet (alkalmazzuk az egyenlő együtthatók módszerét), a következő egyenletet kapjuk:

$$5x - 4z = 0.$$

Ez egy kétismeretlenes egyenlet, melynek végtelen sok megoldása van. Az általános megoldását megkapjuk, ha az egyik ismeretlent megadjuk a másik ismeretlen függvényében. Például $x = \frac{4}{5}z$. Ezt behelyettesítve az egyenletrendszer valamelyik egyenletébe az y ismeretlen is megadható z függvényeként, azaz $y = -\frac{11}{5}z$. Az egyenletrendszer megoldásának halmaza tehát $\left\{\left(\frac{4}{5}t; -\frac{11}{5}t; t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$. Egy konkrét megoldása az egyenletrendszernek $t = 5$ mellett a $(4; -11; 5)$ számhármas.

7. feladat: Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ y - 3z = -5 \\ 5z - x = 14. \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az egyenletrendszer lineáris, három egyenletből álló, háromismeretlenes egyenletrendszer. Ennek megoldásához eljuthatunk a korábban bemutatott megoldási módszerek kombinálásával is. Például az első és a harmadik egyenletben az x ismeretlen együtthatói egymás ellentettjei. Ennélfogva az egyenlő együtthatók módszerének alkalmazásával, ezt a két egyenletet összeadva kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2y + 5z = 23 \\ y - 3z = -5 \end{cases}$$

Így egy kétismeretlenes, két egyenletből álló egyenletrendszerhez jutatottunk. Itt újra alkalmazható a fent használt módszer oly módon, hogy a második egyenletet -2-vel szorozva és hozzáadva az első egyenletet a következő egyismeretlenes egyenlethez jutunk:

$$11z = 33 \Rightarrow z = 3.$$

Visszahelyettesítve ezt, például az eredeti egyenletrendszer második és harmadik egyenletébe, nyerjük, hogy $y = 4, x = 1$. Tehát a megoldásunk az$(1; 4; 3)$ számhármas.

8. feladat: Teherárú elszállítására vasúti kocsikat állítanak be. Ha egy kocsira 15,5 tonna terhet raknak, akkor 4 tonnát nem tudnak berakni. Ha egy kocsira 16,5 tonna terhet raknak, akkor a kocsik megtöltéséhez még 4 tonna teher kellene. Hány vasúti kocsit állítottak be és hány tonna volt a teher?

Megoldás:

Jelölje x a kocsik számát és y a teher tömegét. A feladat feltételei alapján a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{cases} 15{,}5x + 4 = y \\ 16{,}5x - 4 = y. \end{cases}$$

Minthogy az egyenletek jobb oldalai egyenlők, így a bal oldalak is. Tehát

$$16{,}5x - 4 = 15{,}5x + 4;$$

$$x = 8.$$

Így $y = 15{,}5 \cdot 8 + 4 = 128.$

Tehát 8 vasúti kocsit állítottak be és 128 tonna volt a teher.

9. feladat: Petinek $230\,m$ hosszú drót áll rendelkezésére, amellyel körbe szeretné keríteni a téglalap alakú $3400\ m^2$-es telkét.

a) Elegendő-e ennyi drót a körbekerítéshez?

b) Ha nem, akkor maximum hány m^2 téglalap alakú telket tudna körbekeríteni ennyi dróttal?

Megoldás:

a) Legyen a körbekerítendő telek hosszúsága és szélessége rendre a és b. Ekkor a telek kerülete $2(a+b)=230$, területe $ab=3400$. Minthogy olyan a és b értékeket keresünk, melyek mindkét egyenlet megoldásai, így a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{cases} 2\cdot(a+b)=230 \\ ab=3400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=115 \\ ab=3400 \end{cases}$$

Az első egyenletből kifejezve az a-t és behelyettesítve a második egyenletbe egy egyismeretlenes másodfokú egyenlethez jutunk:

$$b\cdot(115-b)=3400.$$

Elvégezve a zárójelfelbontást és rendezve az egyenletet a feladatunk a következő egyenlet megoldása:

$$-b^2+115b-3400=0. \qquad (*)$$

Felhasználva a másodfokú egyenlet megoldóképletét

$$D=115^2-4\cdot(-1)\cdot(-3400)<0.$$

Vagyis a valós számok halmazán a kapott másodfokú egyenletnek nincs megoldása. Ennélfogva Peti a $230\ m$ hosszú dróttal nem tudja körbekeríteni az ekkora területű telkét.

b) Jelöljük a telek területét c-vel. Akkor a (*) egyenlet

$$-b^2+115b-c=0$$

alakú lesz.

Ennek akkor lesz megoldása, ha

$$D=115^2-4\cdot(-1)\cdot(-c)\geq 0.$$

Azaz, ha $4c\leq 13\,225$, vagyis $c\leq 3306{,}25$.

Tehát a $230\ [m]$ hosszú drót maximum $3306{,}25\ [m^2]$ területű téglalap alakú telek körbekerítésére elegendő.

10. feladat: A mosogatógépen kétféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 20%-kal több elektromos energiát és 10%-kal kevesebb vizet használ fel, mint a B program. Egy mosogatás az A programmal 151 Ft-ba, a B programmal 140 Ft-ba kerül. A mosogatószer mindkét programmal 40 Ft. Mennyi forint értékű elektromos energiát és vizet használ a B program?

Megoldás:

Tételezzük fel, hogy a B program x Ft értékű elektromos energiát és y Ft értékű vizet használ fel egy mosogatáshoz. Akkor

$$x + y + 40 = 140.$$

Az A program ezért $1{,}2x$ Ft értékű elektromos energiát és $0{,}9y$ Ft értékű vizet használ fel egy mosogatás alkalmával. Az A programmal a mosogatáshoz fordított költségekre fennáll a

$$1{,}2x + 0{,}9y + 40 = 151$$

egyenlet.

Ezen két egyenlet közös megoldását keressük, vagyis meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y + 40 = 140 \\ 1{,}2x + 0{,}9y + 40 = 151. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer első egyenletét $-1{,}2$-el szorozva és hozzáadva a második egyenletet a következő egyismeretlenes egyenlethez jutunk:

$$-0{,}3y = -9 \Rightarrow y = 30.$$

Ekkor $x = 70$.

Tehát a B program 30 Ft értékű vizet és 70 Ft értékű elektromos energiát használ fel a mosogatáshoz.

11. feladat: Egy lóversenyen 3 lóra fogadnak. Ha az 1. nyer, akkor a rá tett összeg kétszeresét, ha a 2. nyer, a négyszeresét, ha a 3. nyer, akkor a nyolcszorosát kapják. Mekkora összeget kell tenni a lovakra, hogy bármelyik is nyer, 100 Ft legyen a nyeresége a fogadónak?

Megoldás:

Jelölje x, y, z – rendre az 1., 2. és 3. lovakra tett összeget. A feladat értelmében, ha az 1. fut be elsőnek, akkor $2x$ nyeresége lesz a fogadónak, de emellett $x + y + z$ a vesztesége.

Hasonlóan, ha a 2. ló fut be elsőnek, akkor a nyereség $4y$ és a veszteség $x+y+z$. Amennyiben a 3. ló lesz a nyertes, akkor a nyereség $8z$ és a veszteség $x+y+z$. Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{cases} 2x-(x+y+z)=100 \\ 4y-(x+y+z)=100 \\ 8z-(x+y+z)=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=100 \\ 3y-x-z=100 \\ 7z-y-x=100. \end{cases}$$

Az első egyenletből kifejezve az x ismeretlent, majd az erre kapott kifejezést behelyettesítve a második és a harmadik egyenletbe, kapjuk a következő kétismeretlenes egyenletet:

$$\begin{cases} 3y-100-y-z-z=100 \\ 7z-y-100-y-z=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2z=200 \\ 6z-2y=200. \end{cases}$$

Az utóbbi egyenletrendszer két egyenletét összeadva, majd megoldva a kapott egyismeretlenes egyenletet, kapjuk, hogy $z=100$. Ezt visszahelyettesítve valamelyik egyenletbe megkapjuk, hogy $y=200$ és $x=400$.

Tehát az első lóra 400 Ft-ot, a másodikra 200 Ft-ot, a harmadikra pedig 100 Ft-ot kell tennünk.

Gyakorló feladatok

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\begin{cases} x\cdot y=600 \\ (x-10)(y+5)=600 \end{cases}$$

egyenletrendszert!

2. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\begin{cases} y^{x^2-8x+1}=1 \\ \lg(2x-y)=1 \end{cases}$$

egyenletrendszert!

3. feladat: Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítésekor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.

a) Hány sor van a fenyők parcellájában? Hány fenyőfa van egy sorban?

b) Hány platánfát telepítettek?

6 TRIGONOMETRIA

Elméleti összefoglaló:

Egy egységnyi hosszúságú vektort (pozitív forgásirányban - az óramutató járásával ellentétes irányban) megforgatva a végpont koordinátái a forgatás szögének koszinuszát és szinuszát adják.

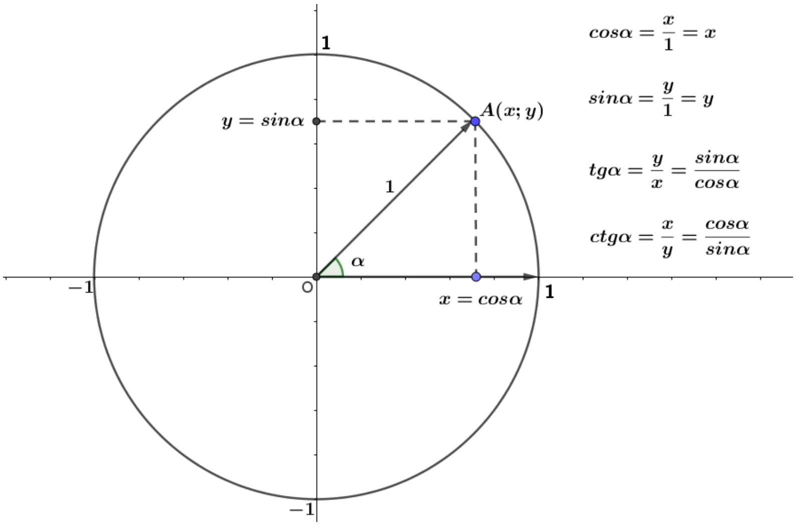
Összefüggések a derékszögű háromszögben:

Derékszögű háromszög hegyesszögének *szinuszán* a szöggel szembeni befogó és átfogó hosszának hányadosát értjük.

Derékszögű háromszög hegyesszögének *koszinuszán* a szög melletti befogó és átfogó hosszának hányadosát értjük.

Derékszögű háromszög hegyesszögének *tangensén* a szöggel szembeni befogó és a szög melletti befogó hosszának hányadosát értjük.

Derékszögű háromszög hegyesszögének *kotangensén* a szög melletti befogó és a szöggel szembeni befogó hosszának hányadosát értjük.



$$cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

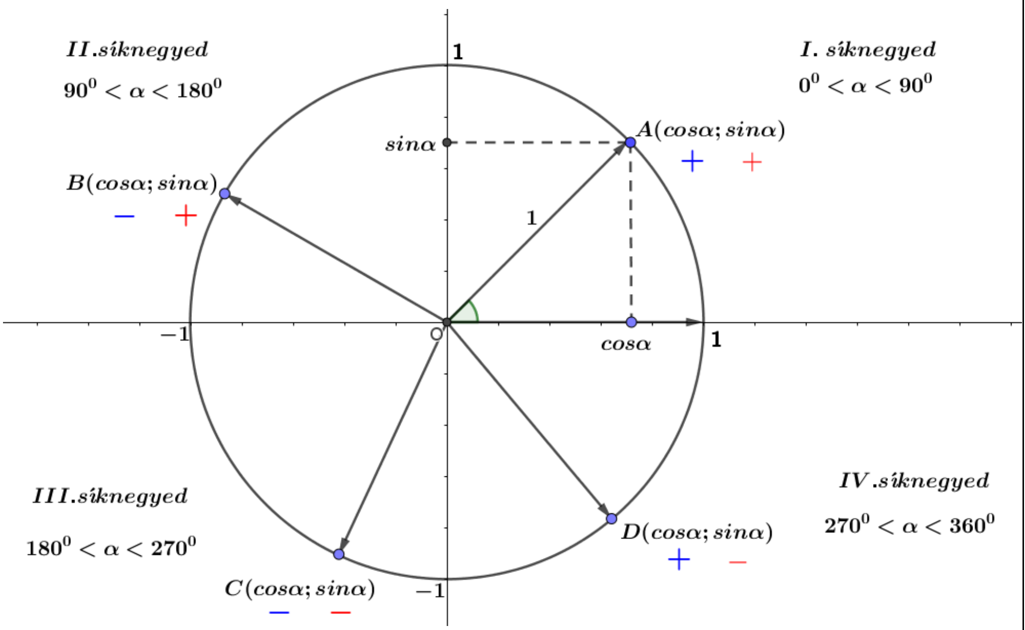
$$sin\alpha = \frac{y}{1} = y$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$$

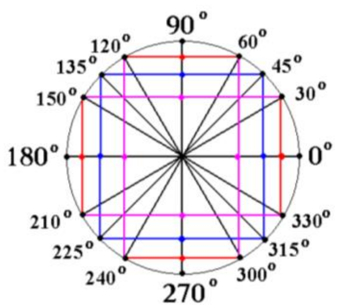
Megjegyezzük, hogy negatív forgásirányban (az óramutató járásával megegyező irányban) a forgatási szög $-\alpha$.

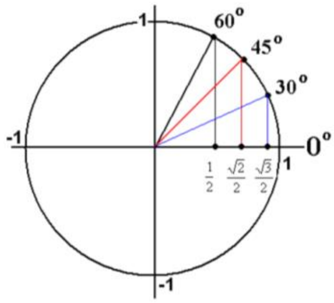
A szögek szinuszainak és koszinuszainak előjelei az egyes síknegyedekben



Nevezetes szögek

Nevezetes szögek az ábrán megjelölt szögek.





A nevezetes szögek szinuszai és koszinuszai a $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$ értékek valamelyikével egyenlők. Ezek az értékek nagyságrendben vannak, így könnyen azonosíthatók a rajzon, a tengelyeken megjelölt értékekkel.

A rajzról bármelyik nevezetes szög szinusza és koszinusza leolvasható, néhányat közülük a következő táblázatban is ismertetünk.

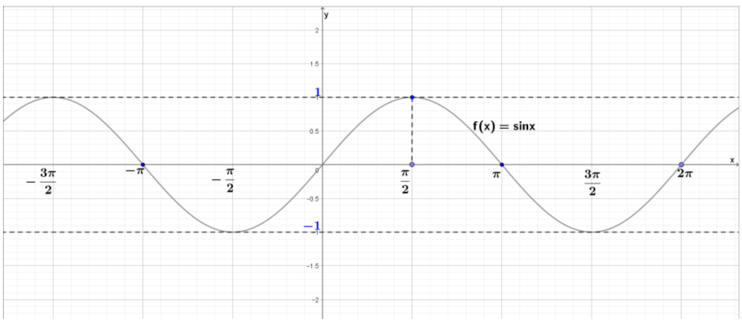
Megjegyezzük, hogy a fok és a radián között a következő összefüggés áll fenn:

$$180^0 = \pi\ (rad)$$

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	135^0	180^0	240^0	270^0	330^0	360^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

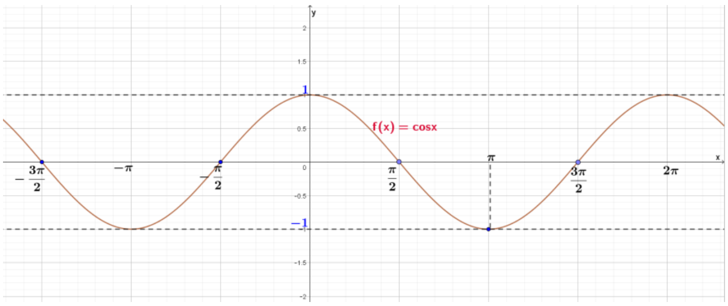
Trigonometrikus függvények

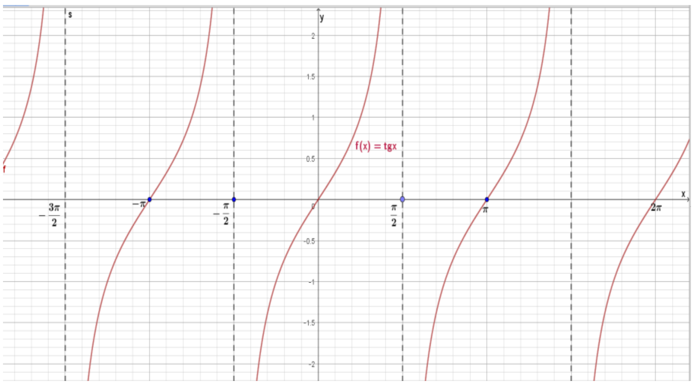
$f(x) = sinx$



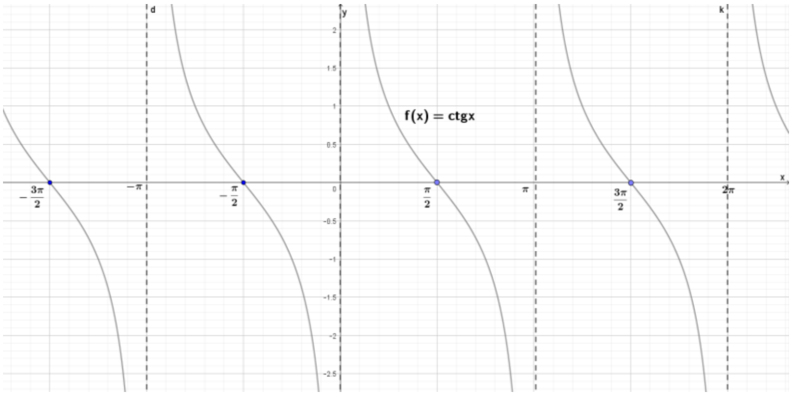
Az $f(x) = sinx$ függvény:

- értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}$
- értékkészlete: $R_f = [-1; 1]$
- zérushelyek: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
- szigorúan monton nő, ha $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
szigorúan monton csökken, ha $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$
- szélsőértékek:
minimumhelyek: $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; minimumérték: -1
maximumhelyek: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; maximumérték: 1
- páratlan: $\sin(-x) = -\sin(x)$(az értelmezési tartomány az origóra szimmetrikus)
- periodusa: 2π
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x) = cosx$</td>
<td>


A függvény páros: $\cos(-x) = cosx$ (az értelmezési tartomány az y-tengelyre szimmetrikus)
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x) = tgx$</td>
<td>


Az $f(x) = tgx$függvény:
- értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\},\ k \in \mathbb{Z}$
- értékkészlete: $R_f = \mathbb{R}$
- zérushelyek: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
- szigorúan monton nő a teljes értelmezési tartományon
- szélsőértékek: nincsenek
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>- páratlan: $\mathrm{tg}(-x) = -tg(x)$
- periodusa: π</td></tr>
<tr><td>$f(x) = ctgx$</td><td>

A függvény páros: $\mathrm{ctg}(-x) = ctgx$ (az értelmezési tartomány az y-tengelyre szimmetrikus)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Néhány trigonometrikus azonosság</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.) $sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.) $1 + tg^2 \propto = \frac{1}{cos^2 \propto}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.) $ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.) $\cos(\propto \pm \beta) = cos \propto cos\beta \mp sin \propto sin\beta$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.) $\sin(\propto \pm \beta) = sin \propto cos\beta \pm cos \propto sin\beta$</td></tr>
<tr><td colspan="2">6.) Az 4. és 5. képletből $\propto = \beta$ jelöléssel adódik, hogy
$\cos(2 \propto) = cos^2 \propto - sin^2 \propto$
$\sin(2 \propto) = 2sin \propto cos \propto$</td></tr>
</table>

Trigonometrikus egyenletek

A legegyszerűbb trigonometrikus egyenletek:

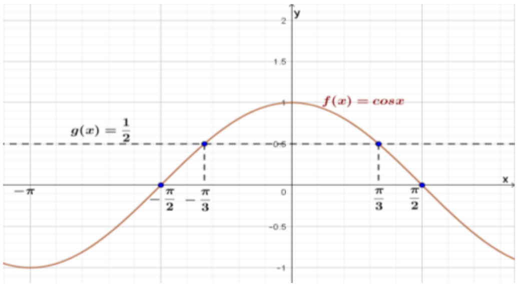
$$cosx = c, \quad sinx = c,$$

$$tgx = c, \;\; ctgx = c$$

Az egyenletenek nyilván csak akkor vanmegoldása, ha a c szám benne van az adott trigonometrikus függvény értékkészletében. Ha ez teljesül, a megoldásokat az adott trigonometrikus függvény periodicitási tulajdonságát felhasználva tudjuk megadni.

$$cosx = \frac{1}{2}$$

Az egyenlet megoldásához a grafikus módszert választjuk. Ábrázoljuk az egyenlőségjel mindkét oldalán lévő függvényt, majd megkeressük a függvények grafikonjainak metszéspontjait.



A két grafikonnak 2π perioduson belül két metszéspontja is van. Felhasználva, hogy az $f(x) = cosx$ függvény periodusa 2π, így az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l = \frac{5\pi}{3} + 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z}$$

Másik megoldási módszer:

Felhasználjuk azt, hogy az $f(x) = cosx$ függvény az első és a negyedik síknegyedben pozitív, illetve hogy a függvény felveszi az $\frac{1}{2}$ értéket az $x = \frac{\pi}{3}$ hegyesszög (első síknegyed) és az $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ (negyedik síknegyed) helyeken. Akkor az egyenlet megoldási

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l = \frac{5\pi}{3} + 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z}$$

Tételek a szögfüggvények alkalmazására általános háromszögekben	
Szinusztétel Legyen az *ABC* háromszög három oldala a, b, c, az oldalakkal szemközti szögek pedig rendre α, β, γ. Ekkor $$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$ Azaz az oldalak aránya megegyezik a megfelelő oldalakkal szemközti szögek szinuszának arányával.	Egy háromszög két szöge $\alpha = 83^0, \beta = 67^0$, a nagyobikkal szemközti oldalának hossza $a = 21\ cm$. Határozzuk meg a többi oldalt és szöget. Megoldás: A harmadik szög egyszerű kivonással adódik: $$\gamma = 180^0 - \alpha - \beta = 30^0.$$ A b és c oldalt a szinusztétellel könnyen meg tudjuk határozni: $$\frac{b}{21} = \frac{sin67^0}{sin83^0} \Longrightarrow b \approx 19{,}5\ [cm]$$ $$\frac{c}{21} = \frac{sin30^0}{sin83^0} \Longrightarrow c \approx 10{,}6\ [cm]$$
Koszinusztétel Legyen az *ABC* háromszög három oldala a, b, c, az oldalakkal szemközti szögek pedig rendre α, β, γ. Ekkor $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$$	Egy háromszög két oldala $a = 12\ cm, b = 15cm$ és az általuk bezárt szög $\gamma = 60^0$. Határozzuk meg a harmadik oldalt! Megoldás: A koszinusztételt felhasználva $$c^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot cos60^0 \Longrightarrow$$ $$c^2 = 144 + 225 - 360 \cdot \frac{1}{2} = 189 \Rightarrow$$ $$c \approx 13{,}7\ [cm]$$

1. feladat: A szögfüggvények definícióinak felhasználásával döntsük el a következő szorzatok előjelét!

a) $cos220^0 \cdot sin220^0$

b) $\text{tg}\ 140^0 \cdot \text{tg}\ 210^0$

Megoldás:

a) Az egységnyi hosszúságú vektor 220^0-kal történő elforgatásával a vektor végpontja a III. síknegyedben lesz. Itt a végpont x és y koordinátája negatív. Ennélfogva $\cos 220^0 = x < 0,\ \sin 220^0 = y < 0$. Tehát

$$\cos 220^0 \cdot \sin 220^0 > 0.$$

b) Felhasználva, hogy $\mathrm{tg}140^0 = \frac{\sin 140^0}{\cos 140^0}$ és az egységnyi hosszúságú vektor 140^0-kal történő elforgatásával a vektor végpontja a II. síknegyedben lesz, ahol $\cos 140^0 = x < 0,\ \sin 140^0 = y > 0$, kapjuk, hogy

$$\mathrm{tg}\ 140^0 < 0.$$

Az egységnyi hosszúságú vektor 210^0-kal történő elforgatásával a vektor végpontja a III. síknegyedben lesz, ahol $\cos 210^0 = x < 0,\ \sin 210^0 = y < 0$. Ezért

$$\mathrm{tg}\ 210^0 > 0.$$

Tehát

$$\mathrm{tg}\ 140^0 \cdot \mathrm{tg}\ 210^0 < 0.$$

2. feladat: Adjuk meg a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\cos(-\pi) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

b) $2\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{3\pi}{4} - 3\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$

c) $\cos(180^0 - \propto) + cos \propto + tg\frac{\pi}{4}$

Megoldás:

a) Felhasználva, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény páros, azaz $\cos(-x) = \cos x$ és a $g(x) = \sin x$ függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x$, kapjuk:

$$\cos(-\pi) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\pi \cdot \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= -1 \cdot (-1) \cdot \left(-(-1)\right) = 1.$$

b) Az $\alpha = \frac{3\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\pi}{4}$ nevezetes szög szögfüggvényeinek meghatározásához elegendő tudnunk a $\beta = \frac{\pi}{4}$ szög szögfüggvényeinek értékét, illetve, hogy az egységnyi hosszúságú vektor $\frac{3\pi}{4}$-el történő elforgatásával a vektor végpontja melyik síknegyedben lesz.

Mivel $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ és a $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$-el történő elforgatásával a vektor végpontja a II. síknegyedben lesz, ahol $x=\cos\frac{3\pi}{4}<0$, ezért

$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Felhasználva, hogy $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$, kapjuk:

$$2sin\frac{\pi}{3}+2cos\frac{3\pi}{4}-3tg\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\cdot\sqrt{3}=-2\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

c) Felhasználva, hogy $\cos(180^0-\propto)=cos180^0cos\propto+sin180^0sin\propto=-cos\propto$,

$$\cos(180^0-\propto)+cos\propto+tg\frac{\pi}{4}=-cos\propto+cos\propto+1=1.$$

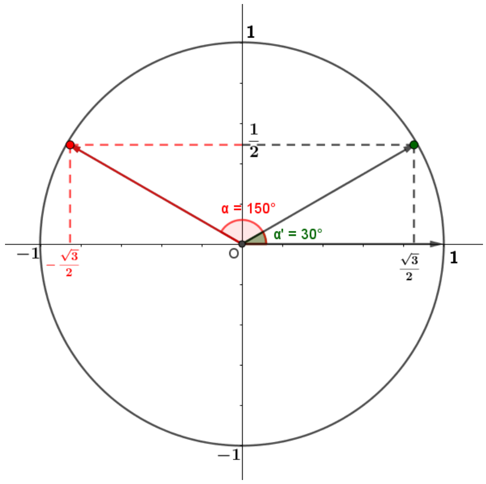
3. feladat: Adjuk meg az α forgásszöget, $0^0\le\alpha<360^0$, segédeszköz használata nélkül, ha

$$cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad sin\alpha=\frac{1}{2}.$$

<u>Megoldás:</u>

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ és az $\frac{1}{2}$ egy nevezetes, első síknegyedbeli szög koszinuszának és szinuszának értékei. Az egységkörről könnyen leolvasható, hogy ez a szög a $\alpha'=\frac{\pi}{6}=30^0$. Ezt nevezzük segédszögnek. (A keresett szög ezen szög számszorosa lesz.)

A keresett α forgásszög szinusza pozitív, koszinusza pedig negatív, így az egységnyi hosszúságú vektor ilyen szögben történő elforgatásával a vektor végpontjának a II. síknegyedben kell lennie. Ehhez az egységnyi hosszúságú vektort $180^0-30^0=150^0=5\cdot30^0$-os szögben kell elforgatnunk.



Tehát a keresett szög

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

4. feladat: Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $cos15^0 \cdot sin15^0 + tg180^0$

b) $sin70^0 \cdot sin40^0 + \frac{1}{2}cos110^0$

c) $cos^2 75^0 - sin^2 75^0 + ctg90^0$

<u>Megoldás:</u>

a) Felhasználva, hogy $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$, illetve, hogy $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, kapjuk:

$$cos15^0 \cdot sin15^0 + tg180^0 = \frac{1}{2}\sin(2 \cdot 15^0) + \frac{sin180^0}{cos180^0} \Longrightarrow$$

$$cos15^0 \cdot sin15^0 + tg180^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}.$$

b) Mivel

$$cos110^0 = \cos(70^0 + 40^0),$$

ezért felhasználva a 4. trigonometrikus azonosságot (lásd fentebb a táblázatban) azt kapjuk, hogy:

$$\cos(70^0 + 40^0) = \cos 70^0 cos40^0 - sin70^0\, sin40^0.$$

Ennélfogva

$$sin70^0 \cdot sin40^0 + \frac{1}{2} cos110^0 =$$
$$= sin70^0 \cdot sin40^0 + \frac{1}{2}\cos 70^0 cos40^0 - \frac{1}{2} sin70^0\, sin40^0$$

Tehát

$$sin70^0 \cdot sin40^0 + \frac{1}{2} cos110^0 = \frac{1}{2}\cos 70^0 cos40^0 + \frac{1}{2} sin70^0\, sin40^0$$

Újra felhasználva a 4. trigonometrikus azonosságot

$$sin70^0 \cdot sin40^0 + \frac{1}{2} cos110^0 = \frac{1}{2}\cos(70^0 - 40^0) = \frac{1}{2} cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

c) Felhasználva a 6. trigonometrikus azonosságot, azaz cos(2 ∝)=$cos^2 \propto - sin^2 \propto$, kapjuk, hogy

$$cos^2 75^0 - sin^2 75^0 = \cos 150^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mivel $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$, ezért

$$cos^2 75^0 - sin^2 75^0 + ctg90^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. feladat: Határozzuk meg a 105^0 −os szög szögfüggvényeinek pontos értékét!

Megoldás:

A 105^0 −os szöget két nevezetes szög összegeként nyerhetjük: $105^0 = 45^0 + 60^0$. Felhasználjuk a 4. trigonometrikus azonosságokat:

$$\sin 105^0 = \sin(45^0 + 60^0) = sin45^0 cos60^0 + cos45^0 sin60^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow$$
$$\sin 105^0 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 105^0 = \cos(45^0 + 60^0) = cos45^0 cos60^0 - sin45^0 sin60^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 105^0 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\mathrm{tg}105^0 = \frac{sin105^0}{cos105^0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{tg}105^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

$$\mathrm{ctg}105^0 = \frac{cos105^0}{sin105^0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{ctg}105^0 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

6. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

egyenletet!

<u>Megoldás:</u>

Az adott egyenlet ekvivalens a

$$sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

egyenlettel.

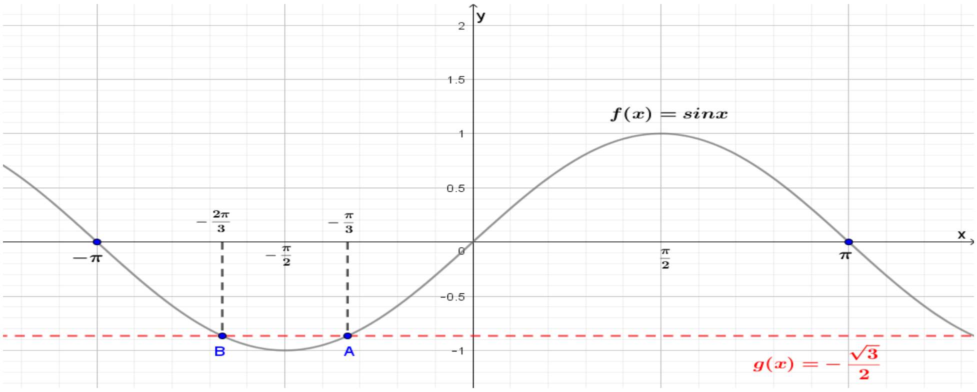
Jelölje $a = 3x - \frac{\pi}{5}$. Akkor meg kell oldanunk a

$$\sin(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

egyenletet.

Ábrázolva az egyenlőségjel két oldalán lévő függvényt, azaz az $f(x) = sinx$ és a $g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ megkeressük azok metszéspontjait (egyenlet megoldása grafikus módszerrel).

Az ábra is jól mutatja, hogy a két grafikon két pontban (*A* és *B*) metszi egymást egy perioduson belül.



Tehát az utóbbi egyenlet megoldásai:

$$a_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$a_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z}$$

Visszahelyettesítve az $a = 3x - \frac{\pi}{5}$ kifejezésbe egyrészt azt kapjuk, hogy

$$3x - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \Longrightarrow x_1 = -\frac{2\pi}{45} + \frac{2\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

másrészt

$$3x - \frac{\pi}{5} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi l \Longrightarrow x_2 = -\frac{7\pi}{45} + \frac{2\pi}{3}l, \qquad l \in \mathbb{Z}$$

7. feladat: Egy harmonikus rezgő mozgást végző test kitérés-idő függvénye

$$y(t) = 6\sin(2t) \qquad (0 \leq t \leq 120),$$

ahol az időt másodpercben, a kitérést méterben mérjük.

a) Mennyi a maximális kitérés?

b) Adjuk meg azokat az időpillanatokat, amikor a kitérés 3 méter!

c) Vázoljuk a kitérés-idő függvény grafikonját a $[0; 10\pi]$ időintervallumban!

<u>Megoldás:</u>

a) Mivel minden x esetén $-1 \leq \sin x \leq 1$, ezért

$$-6 \leq 6\sin(2t) \leq 6,$$

így a maximális kitérés 6 méter.

b) Meg kell oldanunk a

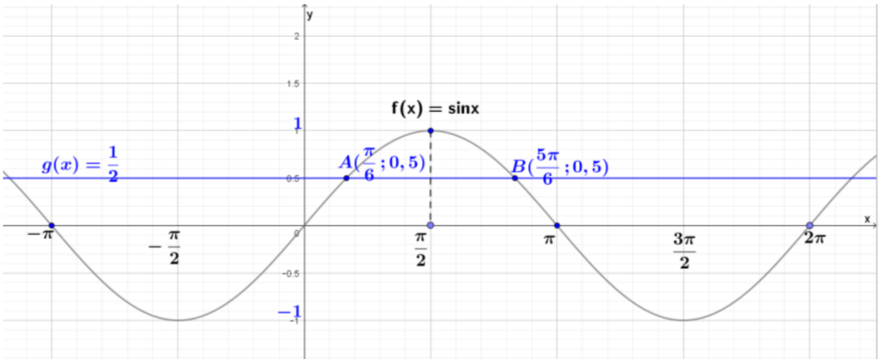
$$6\sin(2t) = 3$$

trigonometrikus egyenletet. Mindkét oldalt elosztjuk 6-tal

$$\sin(2t) = \frac{1}{2}$$

Az egyenlőség megoldásához ábrázoljuk az $f(x) = \sin x$, az egyenlőség bal oldalán lévő alapfüggvényt, illetve a $g(x) = 0{,}5$, az egyenlőség jobb oldalán lévő konstans függvényt.

A két függvény grafikonja egy perioduson belül két pontban metszi egymást.



Ezt tudva adódik, hogy

$$2t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad (k \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq k \leq 38)$$

vagy

$$2t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l. \quad (l \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq l \leq 38)$$

(Megjegyzés: a k és l értékekre a fenti kikötés a $0 \leq t \leq 120$ feltétel miatt van.)

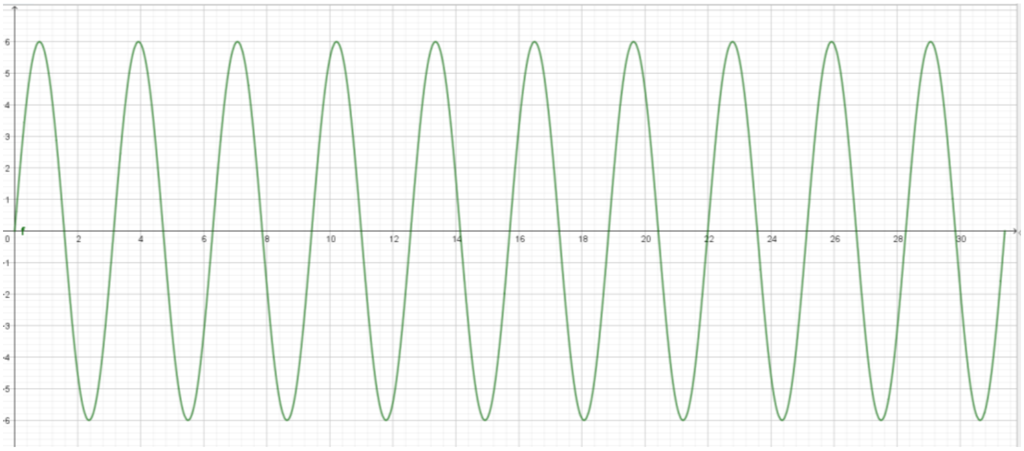
Ezért

$$t = \frac{\pi}{12} + \pi k, \quad (k \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq k \leq 38)$$

vagy

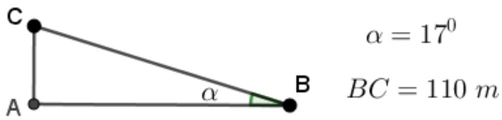
$$t = \frac{5\pi}{12} + \pi l, \quad (l \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq l \leq 38)$$

c) A függvény grafikonja



8. feladat: Milyen magasra visz az a lejtős út, amelynek hossza $110\ m$ és a vízszintessel bezárt szöge 17^0?

Megoldás:



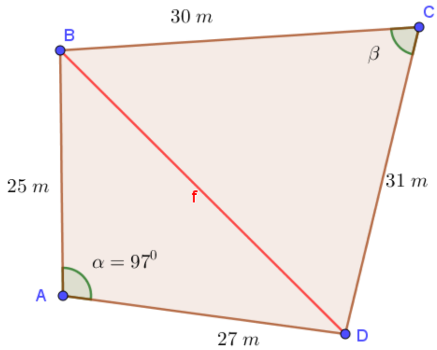
Keresendő az *AC* szakasz hossza. Az *ABC* háromszög derékszögű, melynek ismert az átfogója és az egyik hegyesszöge. A definíció alapján

$$sin\alpha = \frac{AC}{BC} \Longrightarrow AC = BC \cdot sin\alpha$$

$$AC = 110 \cdot sin17^0 \approx 32{,}16\ [m]$$

9. feladat: Egy konvex négyszög alakú telek oldalainak hossza egy adott körüljárás szerint rendre $27\ m,\ \ 25\ m,\ \ 30\ m,\ \ 31\ m.$ A $27\ m$ -es és a $25\ m$ -es oldalaknál a teleknek 97°-os szöge van. Határozzuk meg az ezzel a szöggel szembeni szöget!

Megoldás:



Az ABD háromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$BD^2 = 25^2 + 27^2 - 2 \cdot 25 \cdot 27 \cdot cos97^0$$

$$BD^2 \approx 625 + 727 - 1350 \cdot (-0{,}12) = 1518{,}5$$

$$BD \approx 39[m]$$

A BCD háromszögben is alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$39^2 = 30^2 + 31^2 - 2 \cdot 30 \cdot 31 \cdot cos\beta$$

$$1521 = 900 + 961 - 1860 \cdot cos\beta$$

$$1521 = 1861 - 1860 \cdot cos\beta$$

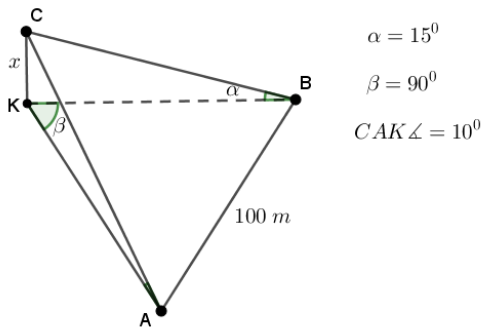
$$-340 = -1860 \cdot cos\beta$$

$$cos\beta = \frac{-340}{-1860} \approx 0{,}1828 \Longrightarrow \beta \approx 79^0$$

10. feladat: Egy sík terepen álló torony magasságát szeretnénk megmérni. A terep A pontjából 10^0-os, a B pontjából 15^0-os szögben látszik a torony C csúcsa. Továbbá az AKB szög nagysága 90^0, ahol K a torony talppontja. Az A és B pontok közötti távolság $100\ m$. Milyen magas a torony?

Megoldás:

Jelöljük a torony magasságát x-szel.



Az *AKC* derékszögű háromszögben

$$ctg10^0 = \frac{AK}{x} \Longrightarrow AK = x \cdot ctg10^0.$$

A *BKC* derékszögű háromszögben

$$ctg15^0 = \frac{BK}{x} \Longrightarrow BK = x \cdot ctg15^0.$$

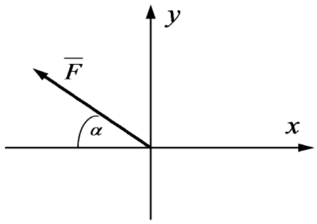
Ezek ismeretében az *AKB* derékszögű háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:

$$AK^2 + BK^2 = AB^2$$

$$(x \cdot ctg10^0)^2 + (x \cdot ctg15^0)^2 = 100^2.$$

Innen a torony magassága, $x \approx 14{,}73\ [m]$.

11. feladat: Az $\vec{F}$ erő nagysága $|\vec{F}| = F = 500\ [N]$, az *x*-tengellyel bezárt szöge $\alpha = 42^0$. Határozzuk meg az erő koordinátáit az ábrán látható koordináta-rendszerben!



Megoldás:

Az *x*-irányú komponens

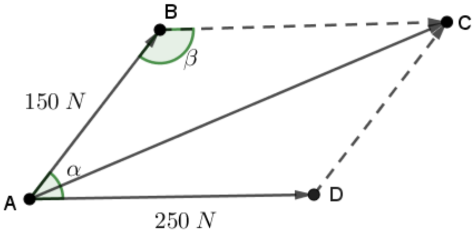
$$F_x = -F \cdot cos\alpha = -500 \cdot cos42^0 \approx -372\ [N].$$

Az *y*-irányú komponens

$$F_y = F \cdot sin\alpha = 500 \cdot sin42^0 \approx 335\ [N].$$

12. feladat: Egy testre két erő hat. Az egyik 150 [N], a másik 250 [N] nagyságú. A két erő 50^0-os szöget zár be egymással. Mekkora az eredő erő és hány fokos szöget zár be a nagyobbik erővel?

Megoldás:



Mivel az $ABCD$ paralelogramma α hegyesszöge 50^0-os, ezért $\beta = 130^0$. Így az ABC háromszögben a koszinusztétellel könnyen kiszámíthatjuk az eredő erőt.

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 150^2 + 250^2 - 2 \cdot 150 \cdot 250 \cdot cos130^0 \Longrightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| \approx 365\ [N].$$

Ennek az eredő erőnek a nagyobbik erővel bezárt szöge a $DAC\angle$. Felhasználva a szinusztételt

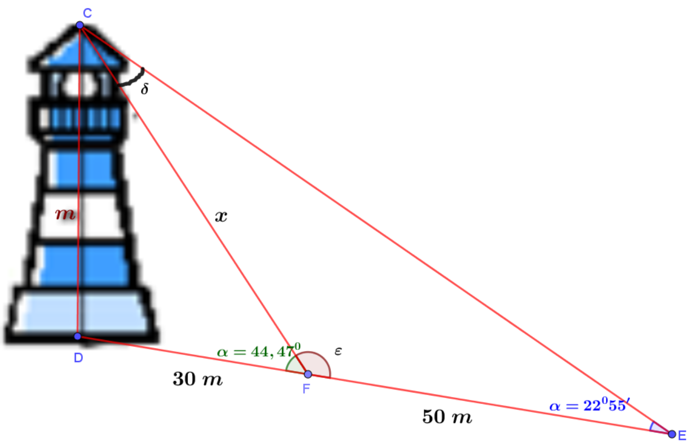
$$\frac{\sin(DAC\angle)}{DC} = \frac{sin130^0}{AC} \Longrightarrow \sin(DAC\angle) = \frac{DC \cdot sin130^0}{AC}$$

$$\sin(DAC\angle) \approx 0{,}31 \Longrightarrow DAC\angle = \arcsin(0{,}31) \approx 20^0.$$

13. feladat: Egy domb tetején álló kilátó magasságát keressük. A kilátó tövétől induló lejtős úton lefelé haladva 30 métert, a kilátó 44,47°-os szögben látszik. További 50 métert haladva a kilátó 22°55’ alatt látszik. Milyen magas a torony?

Megoldás:

A feladat feltételének megfelelően a következő ábra készíthető:



$\varepsilon = 180^0 - 44{,}47^0 = 135{,}53^0.$

$\delta = 180^0 - 135{,}53^0 - 22^0 55' \approx 21{,}55^0.$

A CFE háromszögben alkalmazva a szinusztételt azt kapjuk, hogy

$$\frac{x}{50} = \frac{sin22^0 55'}{sin21{,}55^0} \implies x \approx 53\ [m].$$

A CDF háromszögben koszinusztétel alapján

$$m^2 = 30^2 + 53^2 - 2 \cdot 30 \cdot 53 \cdot cos44{,}47^0 \approx 3709 - 3180 \cdot 0{,}71 = 1439{,}69$$

Akkor

$$m \approx 37{,}94\ [m].$$

Gyakorló feladatok

1. feladat: Számítsuk ki a

$$\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 - sin\frac{4\pi}{3}$$

kifejezés pontos értékét!

2. feladat: Oldjuk meg a $[-\pi; \pi]$ halmazon a

$$sin^2 x - 2sinx = 0$$

egyenletet!

3. feladat: Egy trapéz két párhuzamos oldala *48,36 cm* és *13,41 cm*. Az egyik szár *57,82 cm*. Ennek a nagyobbik alappal bezárt szöge *68,3°*. Határozzuk meg a trapéz negyedik oldalát és a trapéz ismeretlen szögeit!

7 KOORDINÁTAGEOMETRIA

AB szakasz felezőpontja: $$F_{AB}=\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$$	Ha $A(4;2)$ és $B(-2;6)$, akkor $$F_{AB}=\left(\frac{4+(-2)}{2};\frac{2+6}{2}\right)=(1;4)$$
ABC háromszög súlypontja: $$S=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$	Ha $A(6;3), B(-3;2)$ és C(0;-2), akkor $$S=\left(\frac{6-3+0}{3};\frac{3+2-2}{3}\right)=(1;1)$$
A és B pontok távolsága: $$d_{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$	Az $A(4;2)$ és $B(-2;6)$ pontok távolsága: $$d_{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(2-6)^2}=\sqrt{52}=2\cdot\sqrt{13}.$$
Az AB egyenes irányvektoros egyenlete: $$v_2\cdot x-v_1\cdot y=v_2\cdot x_0-v_1\cdot y_0$$	Ha $\vec{v}=(2;5)$ és $A(4;2)$, akkor $$5x-2y=20-4\Rightarrow\ 5x-2y=16.$$
Az AB egyenes normálvektoros egyenlete: $$n_1\cdot x+n_2\cdot y=n_1\cdot x_0+n_2\cdot y_0$$	Ha $\vec{n}=(2;5)$ és $A(4;2)$, akkor $$2x+5y=8+10\Rightarrow\ 2x+5y=18.$$
Az $y=m\cdot x+b$ egyenletű egyenes meredeksége: m.	Az $y=2x+3$ egyenletű egyenes meredeksége: $m=2$.
A $K=(u;v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete: $$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$$	A $K=(2;3)$ középpontú, $r=4$ egység sugarú kör egyenlete: $$(x-2)^2+(y-3)^2=16$$

1. feladat: Tekintsük az $A(2;3), B(-2;1), C(-1;-2)$ csúcsok által meghatározott háromszöget! Számoljuk ki a háromszög oldalainak hosszát!

<u>Megoldás:</u>

Az AB szakasz hossza a háromszög c oldalának hossza:

$$c = d_{AB} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (3-1)^2}$$
$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Az AC szakasz hossza a háromszög b oldalának hossza:

$$b = d_{AC} = \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}.$$

A BC szakasz hossza a háromszög a oldalának hossza:

$$a = d_{BC} = \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2} = \sqrt{(-2+1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}.$$

2. feladat: Az AB szakasz felezőpontja $F_{AB}(5; 2)$, továbbá $A(3; -1)$. Határozzuk meg a B pontot!

Megoldás:

Az AB szakasz felezőpontja:

$$F_{AB} = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right).$$

Ezt felhasználva,

$$(5; 2) = \left(\frac{3 + b_1}{2}; \frac{-1 + b_2}{2}\right).$$

Két pont pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlőek, így az

$$5 = \frac{3 + b_1}{2} \text{és a} \quad 2 = \frac{-1 + b_2}{2}$$

egyenletekhez jutunk. Az egyenletek megoldása után azt kapjuk, hogy

$b_1 = 7$és $b_2 = 5$. Tehát a keresett pont $B(7; 5)$.

3. feladat: Adjuk meg az $e: x + y = -2$ egyenletű egyenes egy normálvektorát, egy irányvektorát, az egyenes meredekségét és irányszögét!

Megoldás:

Az egyenes egy normálvektora:$\vec{n} = (1; 1)$.

Az egyenes egy irányvektora: $\vec{v} = (-1; 1)$.

Az egyenes meredekségének meghatározásához az egyenest

$$y = -2 - x$$

alakban tekintsük. Ekkor a meredekség: $m = -1$.

Az egyenes irányszöge:

$$tg\ \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135°.$$

4. feladat: Adjuk meg az $A(3;2)$, $B(-1;3)$, $C(1;-4)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög súlypontját!

Megoldás:

A háromszög súlypontja:

$$S = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right) = \left(\frac{3 - 1 + 1}{3}; \frac{2 + 3 - 4}{3}\right) = \left(1; \frac{1}{3}\right).$$

5. feladat: Írjuk fel az $A(2;3)$ és $B(4;-2)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét!

Megoldás:

Az A pontból a B pontba mutató irányvektor:

$$\overrightarrow{v_{AB}} = (B - A) = (4 - 2;\ -2 - 3) = (2; -5).$$

Az egyenes irányvektoros egyenlete alapján:

$$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_0 - v_1 \cdot y_0 \Rightarrow\ -5x - 2y = -16.$$

6. feladat: Adjuk meg az $A(4;2)$, $B(-2;2)$, $C(0;-2)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög A csúcsából induló magasságvonalának egyenletét!

Megoldás:

A keresett egyenes merőleges a háromszög BC oldalegyenesére. A BC egyenes egy irányvektora: $\overrightarrow{v_{BC}} = (2; -4)$. Ez a vektor a keresett egyenes egy normálvektora. A keresett egyenes áthalad az $A(4;2)$ ponton, így az egyenes normálvektoros egyenletét felhasználva:

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0 \Rightarrow 2x - 4y = 0.$$

7. feladat: Adjuk meg az $A(4;2)$, $B(-2;2)$, $C(0;-2)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög A csúcsából induló súlyvonalának egyenletét!

Megoldás:

A keresett egyenes áthalad az A és az F_{BC} ponton. Az F_{BC} pont:

$$F_{BC} = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right) = (-1; 0).$$

Az A pontból az F_{BC} $-$be mutató vektor:

$$\overrightarrow{v_{AF_{BC}}} = (-5; -2).$$

Az egyenes irányvektoros egyenletét felhasználva a keresett egyenes egyenlete:

$$-2x + 5y = 2.$$

8. feladat: Határozzuk meg az $x + 2y = 5$ és a $2x - 3y = -4$ egyenesek metszéspontját!

Megoldás:

A metszéspont meghatározásához a két egyenes egyenletéből képzett egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből kifejezzük az x $-$et: $x = 5 - 2y$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot (5 - 2y) - 3y = -4.$$

A zárójel felbontása és összevonás után azt kapjuk, hogy

$$10 - 4y - 3y = -4 \Rightarrow y = 2.$$

Az y értékét behelyettesítve az $x = 5 - 2y$ kifejezésbe $x = 1$ adódik. Tehát a keresett metszéspont: $M(1; 2)$.

9. feladat: Adjuk meg az $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 11$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

Megoldás:

Az egyenletet bal oldalán szereplő kifejezéseket teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 4)^2 - 16 = 11.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25$$

adódik. A kör középpontja: $K(3;-4)$, a kör sugara: $r=\sqrt{25}=5$.

10. feladat: Egy kör átmérőjének két végpontja: $A(6;2)$ és $B(-2;4)$. Írjuk fel a kör egyenletét!

Megoldás:

A kör középpontja az AB szakasz felezőpontja:

$$K=F_{AB}=(2;3).$$

A kör sugara az AK szakasz hossza:

$$r=d_{AK}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}.$$

Tehát a kör egyenlete:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=17.$$

11. feladat: Tekintsük a síkon az $A(2;6)$ és a $B(4;-2)$ pontokat!

a) Írjuk fel az AB egyenes felezőmerőlegesének egyenletét!

b) Írjuk fel az A ponton áthaladó, B középpontú kör egyenletét!

c) Adjuk meg azon pontokat, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik!

d) Adjuk meg az $x^2+8x+y^2-4y=48$ kör és az $y=3x$ egyenes közös pontjait!

Megoldás:

a) Az AB szakasz felezőpontja:

$$F_{AB}=\left(\frac{2+4}{2};\frac{6-2}{2}\right)=(3;2).$$

Az AB szakasz egy irányvektora:

$$\overrightarrow{v_{AB}}=(B-A)=(2;-8),$$

ami a keresett egyenes egy normálvektora. Így a keresett egyenes egyenlete:

$$2x-8y=2\cdot 3+(-8)\cdot 2\Rightarrow 2x-8y=-10\Rightarrow x-4y=-5.$$

b) A keresett kör középpontja: $B(4;-2)$, sugara: $r=d_{AB}=\sqrt{2^2+(-8)^2}=\sqrt{40}$.

Tehát a kör egyenlete:

$$(x-4)^2+(y+2)^2=40.$$

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x^2-8x+16+y^2+4y+4=40 \Rightarrow x^2-8x+y^2+4y=20.$$

c) A Thálesz-tétel miatt azon pontok halmaza, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik az AB szakasz Thálesz körének pontjai. A keresett kör középpontja:

$$K=F_{AB}=(3;2).$$

A kör sugara:

$$r=d_{KA}=\sqrt{(3-2)^2+(2-6)^2}=\sqrt{17}.$$

A kör egyenlete:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=17.$$

d) Az egyenes és kör közös pontját az egyenletükből alkotott egyenletrendszer megoldása adja. Tehát keressük az

$$\left.\begin{aligned} x^2+8x+y^2-4y&=48\\ y&=3x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldását. A második egyenletet: $y=3x$ behelyettesítjük az első egyenletbe. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$x^2+8x+9x^2-12x=48.$$

Összevonás után a

$$10x^2-4x-48=0$$

egyenlet adódik. Az egyenletet 2-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$5x^2-2x-24=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot5\cdot24}}{10}=\frac{2\pm22}{10},$$

így $x_1=2{,}4$, illetve $x_2=-2$. Ekkor $y_1=3\cdot2{,}4=7{,}2$, illetve $y_2=3\cdot(-2)=-6$. Tehát az egyenes és kör közös pontjai: $P_1(2{,}4;7{,}2)$, illetve $P_2(-2;-6)$.

12. feladat: Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy a $(3; 4)$ és a $(-2; 3)$ pontok illeszkedjenek az

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

egyenletű körre.

Megoldás:

Mivel a (3;4) pont illeszkedik a körre, ezért

$$3^2 + 4^2 + 3a + 4b = 0 \Rightarrow 3a + 4b = -25.$$

Mivel a (-2;3) pont illeszkedik a körre, ezért

$$(-2)^2 + 3^2 - 2a + 3b = 0 \Rightarrow -2a + 3b = -13.$$

Tehát meg kell oldanunk az alábbi egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 4b = -25 \\ -2a + 3b = -13 \end{array}\right\}.$$

Az első egyenlet kétszeresét adjuk hozzá a második egyenlet háromszorosához. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$17b = -89 \Rightarrow b = -\frac{89}{17}.$$

A kapott értéket behelyettesítve például az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3a - \frac{356}{17} = -25 \Rightarrow a = -\frac{23}{17}.$$

13. feladat: Határozzuk meg az r értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 = r^2$ egyenletű kört érintse a $2x - y = -1$ egyenletű egyenes!

Megoldás:

Az egyenes egyenletéből azt kapjuk, hogy $y = 2x + 1$.

Ezt behelyettesítve a kör egyenletébe

$$x^2 + (2x + 1)^2 = r^2$$

adódik. Ha a kört az egyenes érinti, akkor az egyenleteikből képzett egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, ami csak úgy lehet, ha a fenti másodfokú egyenletnek egy megoldása van, azaz a diszkriminánsa zérus.

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = r^2.$$

Összevonva az egynemű tagokat és az egyenletet nullára rendezve

$$5x^2 + 4x + 1 - r^2 = 0$$

adódik. A szokásos jelölések mellett $a = 5, b = 4, c = 1 - r^2$, így az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 5 \cdot (1 - r^2) = 16 - 20 + 20r^2 = 20r^2 - 4.$$

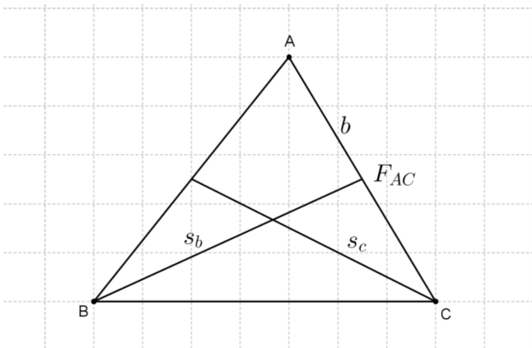
Tehát a $20r^2 - 4 = 0$ egyenletet kell megoldanunk:

$$20r^2 - 4 = 0 \Rightarrow 20r^2 = 4 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow r = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

A kör sugara csak pozitív szám lehet, így az egyetlen megoldás:

$$r = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

14. feladat: Az ABC háromszög AC oldalegyenesének egyenlete: b: $2x + y = 5$, az s_b súlyvonal egyenlete: s_b: $3x + y = 7$, az s_c súlyvonal egyenlete: s_c: $x + y = 5$. Adjuk meg a háromszög csúcspontjainak koordinátáit!



Megoldás:

A b oldalegyenes és az s_c súlyvonal metszéspontja a háromszög C csúcsa:

$$b: 2x + y = 5$$

$$s_c: x + y = 5.$$

Az első egyenletből kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy $x = 0$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $y = 5$ adódik. Tehát a háromszög C csúcsa: $C(0; 5)$.

A b oldalegyenes és az s_b súlyvonal metszéspontja a háromszög b oldalának felezőpontja:

$$b: 2x + y = 5$$

$$s_b: 3x + y = 7.$$

A második egyenletből kivonva az első egyenletet azt kapjuk, hogy $x = 2$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $y = 1$ adódik. Tehát a háromszög AC oldalának felezőpontja: $F_{AC}(2; 1)$.

Mivel az b oldal felezőpontja F_{AC}, ezért

$$F_{AC} = \left(\frac{a_1 + c_1}{2}; \frac{a_2 + c_2}{2}\right),$$

így az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$(2; 1) = \left(\frac{a_1 + 0}{2}; \frac{a_2 + 5}{2}\right),$$

tehát $2 = \frac{a_1}{2}$ és $1 = \frac{a_2+5}{2}$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $a_1 = 4$, a másodikból azt, hogy $a_2 = -3$. Tehát a háromszög A csúcsa: $(4; -3)$.

A háromszög súlypontja az s_b és s_c súlyvonalak metszéspontja:

$$s_b: x + y = 5$$

$$s_c: 3x + y = 7.$$

A második egyenletből kivonva az elsőt azt kapjuk, hogy $2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $y = 4$. Tehát a háromszög súlypontja: $S(1; 4)$.

A háromszög súlypontja:

$$S = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$(1; 4) = \left(\frac{4 + b_1 + 0}{3}; \frac{-3 + b_2 + 5}{3}\right),$$

azaz

$$(1;4) = \left(\frac{4+b_1}{3}; \frac{2+b_2}{3}\right).$$

Ezt felhasználva az $1 = \frac{4+b_1}{3}$, illetve $4 = \frac{2+b_2}{3}$ egyenletek adódnak. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $b_1 = -1$, illetve $b_2 = 10$. Tehát a háromszög B csúcsa: $B(-1;10)$.

Gyakorló feladatok

1.feladat: Legyen $A(4;2)$, $B(-2;3)$ és $C(0;-4)$. Adjuk meg az ABC háromszög B csúcsából induló súlyvonalának és A csúcsából induló magasságvonalának metszéspontjának koordinátáit!

2.feladat: Adjuk meg az $x^2 + y^2 - 4x + 10y = 7$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

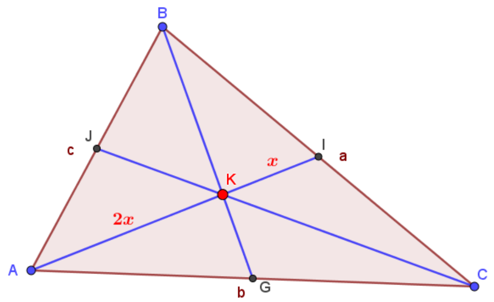
3.feladat: Adjuk meg a $2x + y = 4$ és $x - 3y = -5$ egyenletű egyenesek metszéspontján áthaladó, $6x + 6y = 5$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenes egyenletén.

8 SÍKGOMETRIA

Elméleti összefoglaló:

Háromszögek

Általános háromszög



AI – súlyvonal

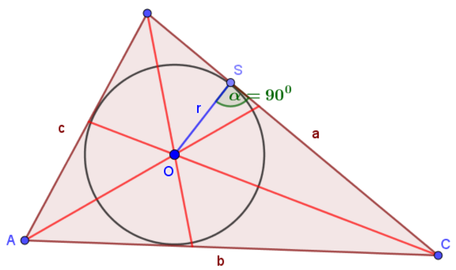
I – a BC oldal felezőpontja

K – a BG, CJ és AI súlyvonalak metszéspontja

$$\frac{AK}{KI} = \frac{BK}{KG} = \frac{CK}{KJ} = \frac{2}{1}$$

Tétel: A háromszög bármely súlyvonala felezi a háromszög területét. Azaz

$$T_{ABI\Delta} = T_{ACI\Delta} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABC\Delta}$$



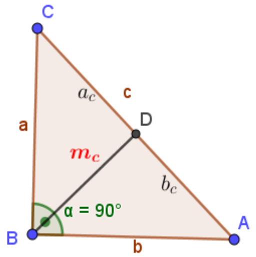
AO – szögfelező

O – a szögfelezők metszéspontja, ami a háromszögbe írt kör középpontja

$OS = r$ – a beírt kör sugara

$OS \perp a$

Derékszögű háromszög



a, b –befogók, c –átfogó

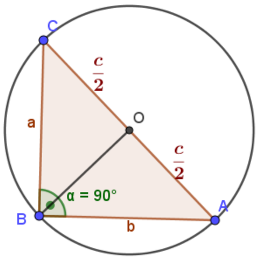
m_c –magasság, a_c – az a befogó átfogóra eső merőleges vetülete; b_c – az b befogó átfogóra eső merőleges vetülete;

Pitagorasz tétel: $c^2 = a^2 + b^2$

Magasság- és befogótételek:

$$m_c{}^2 = a_c \cdot b_c; \qquad a^2 = c \cdot a_c; \qquad b^2 = c \cdot b_c$$

Thalész-tétel: Ha egy kör átmérőjének két végpontját a körvonal bármely másik pontjával összekötjük, akkor derékszögű háromszöget kapunk. Az átmérő a derékszögű háromszög átfogója.

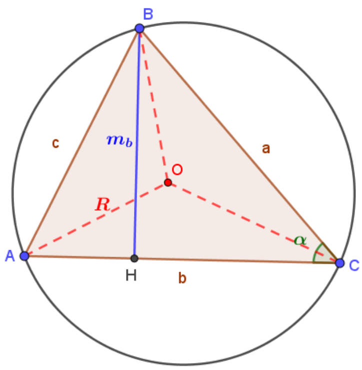


O –a kör középpontja

CA – a kör átmérője

Thalész tételének a megfordítása is igaz: Egy derékszögű háromszög köré írt kör középpontja mindig az átfogójának felezőpontja lesz. Az átfogó a kör átmérője.

A háromszög területe



$$T = \frac{1}{2} b \cdot m_b$$

$$T = \frac{1}{2} ab \cdot sin\alpha$$

Hérón képlete:

$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ahol

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$T = \frac{abc}{4R}$, ahol R – a körülírt kör sugara

$T = r \cdot p$, ahol r – a beírt kör sugara

Megjegyzés: A háromszög köré írt kör középpontja (O) az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.

A ***derékszögű háromszög területe***:

$$T = \frac{1}{2}ab \cdot sin90^0 = \frac{1}{2}ab$$

Téglalap, négyzet területe

Legyenek a téglalap oldalai *a* és *b* hosszúságúk. Akkor a ***téglalap területe***

$$T = ab$$

Minthogy a négyzet téglalap, melynek oldalai egyenlők, ezért a ***négyzet területe***

$$T = a^2$$

Paralelogramma, rombusz területe

Legyenek a paralelogramma nem párhuzamos oldalai *a* és *b* hosszúságúk, az *a* oldalra bocsájtott magasság m_a, az oldalak által bezárt szög pedig α. Akkor a ***paralelogramma területe***

$$T = a \cdot m_a$$

$$T = ab \cdot sin\alpha$$

Mivel a rombusz olyan paralelogramma, melynek oldalai egyenlők, ezért a r***ombusz területe***

$$T = a \cdot m_a$$

$$T = a^2 \cdot sin\alpha$$

$T = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, ahol $d_1, d_2 -$ a rombusz átlói

Trapéz területe

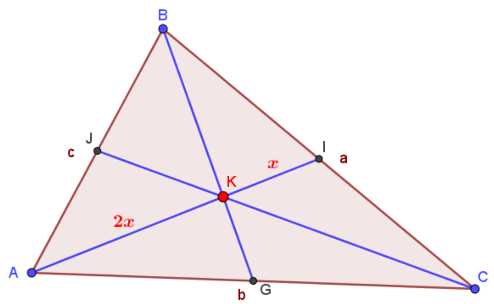
Legyenek a trapéz alapjai (párhuzamos oldalai) *a* és *b* hosszúságúak, magassága *h*. Akkor a trapéz területe

$$T = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Ha *m* jelöli a trapéz középvonalát, akkor $m = \frac{a+b}{2}$. Így $T = m \cdot h$.

Kör kerülete és területe
Az R sugarú ***kör kerülete*** $$k = 2\pi R$$ Ha d jelöli a kör átmérőjét, akkor $d=2R$.   ***A kör területe*** $$T = \pi R^2$$

1. feladat: Az ABC háromszögben AI súlyvonal, $KI = 4\ cm$, $CAI\angle = 30^0$, az AC oldal hossza pedig 20 cm (lásd az ábrát). Mekkora az ABC háromszög területe?



Megoldás:

Mivel a súlyvonalak metszéspontja a K pont az AI súlyvonalat 2:1 arányban osztja, így

$$KI = \frac{AI}{3} \Longrightarrow AI = 12\ [cm].$$

Minthogy a háromszög súlyvonala a háromszöget két egyenlő területű háromszögre osztja, ezért először meghatározzuk az ACI háromszög területét.

$$T_{AIC\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot \sin 30^0 = 60\ [cm^2]$$

Akkor az ABC háromszög területe:

$$T_{ABC\Delta} = 2 \cdot T_{AIC\Delta} = 120\ [cm^2]$$

2. feladat: Egy egységnyi területű egyenlő szárú háromszög szárszöge 30^0. Mekkora a szára, az alapja és a magassága?

Megoldás:

A feladat feltétele alapján $T_\Delta = 1$. A háromszög területképletét felhasználva kiszámítható a háromszög szárának, alapjának és magasságának hossza.

Egyrészt, mivel a háromszög egyenlő szárú és a szárszög nem más, mint az egyenlő oldalak által bezárt szög, így bevezetve a szár hosszúságának jelölésére az x-et,

$$T_\Delta = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 30^0 \Longrightarrow$$

$$1 = \frac{1}{4} \cdot x^2 \Longrightarrow x = 2.$$

Tehát a háromszög szára $x = 2$.

Másrészt egyenlő szárú háromszög lévén az alapon fekvő szögek egyenlők és 75^0-osak.

Jelölje a háromszög alapját y. Akkor újra alkalmazva a háromszög területképletét két „ismert” oldal (szár és alap), valamint a köztük lévő szög (75^0) ismeretében, kapjuk, hogy

$$T_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot y \cdot \sin 75^0 \Longrightarrow$$

$$1 = y \cdot \sin 75^0 \Longrightarrow y \approx 1$$

Jelölje a háromszög magasságát m. Ismerve, hogy a háromszög területe az egyik oldal és a rá bocsájtott magasság szorzatának fele, azt kapjuk, hogy

$$1 = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \mathrm{m} \Longrightarrow m \approx 2.$$

3. feladat: Egy rombusz átlóinak aránya 5:12, kerülete $260\ cm$. Mekkorák a rombusz átlói és a rombusz területe?

Megoldás:

Mivel a rombusz minden oldala egyenlő hosszúságú, így a kerülete az oldalának 4-szerese. Tehát a rombusz oldala $260: 4 = 65\ [cm]$.

Legyenek a rombusz átlói $5x$ és $12x$. A rombusz átlói merőlegesek és felezik egymást, ezért azok 4 darab egybevágó derékszögű háromszögre osztják a rombuszt. Ezek mindegyikére igaz a Pitagorasz-tétel, azaz

$$\left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{12x}{2}\right)^2 = 65^2.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve nyerjük a

$$25x^2 + 144x^2 = 16900$$

egyenletet. Innen kapjuk, hogy

$$x^2 = 100 \implies x = 10.$$

Akkor a rombusz átlói $50\ cm$ és $120\ cm$ hosszúak.

A rombuszt alkotó derékszögű háromszögek területe a befogók félszorzata. A háromszög befogói pedig az átlók felei, azaz $25\ cm$ és $60\ cm$ hosszúak.

$$T_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 60 = 750\ [cm^2].$$

Akkor a rombusz területe

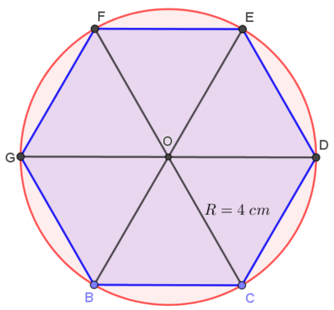
$$T_{rombusz} = 4 \cdot T_{\Delta} = 3000\ [cm^2]$$

4. feladat: Egy kör alakú bádoglemezből, melynek 4 cm a sugara, a lehető legnagyobb területű szabályos hatszöget szeretnénk kivágni. Mekkora a selejt bádoglemez területe?

Megoldás:

A selejt bádoglemez területe a körlap területének és a hatszög területének a különbségével egyenlő.

$$T_{selejt} = T_{kör} - T_{hatszög}$$



Az ábra is jól mutatja, hogy a hatszöget 6 egybevágó, egyenként 60^0-os szárszöggel rendelkező egyenlő szárú (ilyen szárszög mellett egyenlő oldalú) háromszög alkotja. Ezért

$$T_{hatszög} = 6 \cdot T_{háromszög}$$

A háromszög területét a két oldala és az általuk bezárt szög ismeretében számítjuk ki:

$$T_{háromszög} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot sin60^0 = 4\sqrt{3}\ \ [cm^2].$$

Így a hatszög területe

$$T_{hatszög} = 6 \cdot 4\sqrt{3} \approx 41{,}56 \quad [cm^2].$$

A körlap területe

$$T_{körlap} = \pi R^2 = 16\pi \approx 50{,}24\ [cm^2].$$

Akkor a selejt területe

$$T_{selejt} \approx 8{,}67\ [cm^2].$$

5. feladat: Le szeretnénk parkettázni egy 15 m^2-es szobát. Hány darab 34,5 cm hosszú és 4 cm széles parkettára van szükség?

<u>Megoldás:</u>

Egy darab parketta lefed

$$T = 34{,}5 \cdot 4 = 138\ [cm^2]$$

területet.

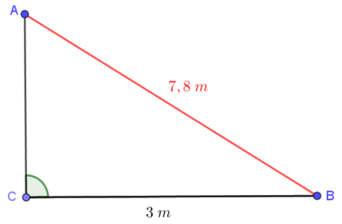
Mivel $15m^2 = 150\,000\ cm^2$, ezért egy ilyen területű szoba parkettázásához

$$150\,000 : 138 \approx 1087$$

darab parketta kell.

6. feladat: Egy *7,8 m* hosszúságú létrát úgy támasztottak az épület falához, hogy a létra talajjal érintkező pontja az épülettől *3 m* távolságra van. Milyen magasan van az épület falán a létra másik pontja?

<u>Megoldás:</u>



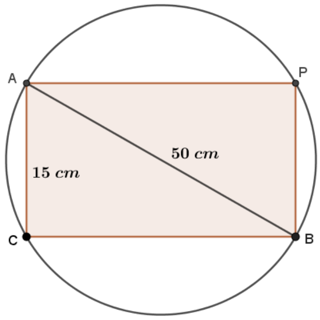
Az AC szakasz hosszát keressük. Az ABC háromszög derékszögű, C csúcsú derékszöggel. A Pitagorasz- tételből adódik, hogy

$$AC^2 = 7{,}8^2 - 3^2 = 51{,}84.$$

Akkor $AC = 7{,}2\ [m]$.

7. feladat: Egy $25\,cm$ sugarú kör farönkből olyan gerendát szeretnénk fűrészelni, melynek vastagsága $15\,cm$ és szélessége egy ilyen farönkből kifűrészelhető maximális szélességgel egyezik meg. Milyen széles a lehető legszélesebb gerenda?

Megoldás:



A farönk átmérője

$$AB = 2 \cdot R = 2 \cdot 25 = 50\ [cm]$$

Az ABC derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel segítségével a keresett szélesség kiszámítható:

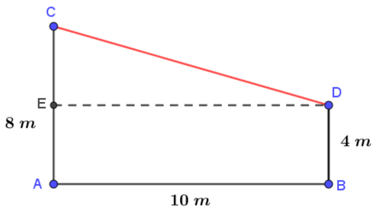
$$BC^2 = 50^2 - 15^2 = 2275 \Longrightarrow$$

$$BC = \sqrt{2275} \approx 47{,}6\ [cm]$$

8. feladat: Két gyárépület között anyagszállításhoz lejtős csúszdát építettek. Határozzuk meg a csúszda hosszát, ha a gyárépületek távolsága $10\ m$ és a csúszda végeit $8\ m$, illetve $4\ m$ magasan helyezték el!

Megoldás:

A feladatnak megfelelő ábra jól mutatja, hogy a csúszda hossza nem más, mint egy derékszögű trapéz hosszabbik szára (lásd az ábrán).



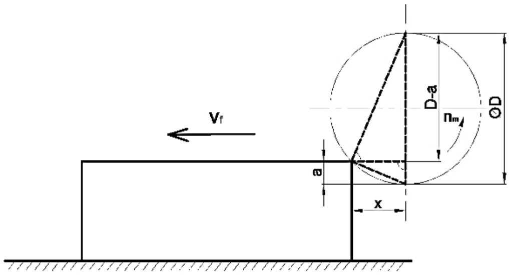
A CED derékszögű háromszögből a csúszda hossza a Pitagorasz-tétel alkalmazásával meghatározható.

Minthogy $CE = CA - AE = 8 - 4 = 4\ [m]$, ezért

$$CD^2 = DE^2 + CE^2 \Rightarrow\ CD^2 = 100 + 16 = 116.$$

Akkor $CD = \sqrt{116} \approx 11\ [m]$.

9. feladat: Az alábbi ábra egy palástmarási technológiát ábrázol.
Határozzuk meg az x szakasz hosszát, ha $a = 8\ mm, D = 100\ mm$!



Megoldás:

A Thalész-tétel alapján a körben lévő háromszög derékszögű. Ennek átfogójára, mely a kör átmérője, magasságot bocsájtottunk. Ez az x szakasz. A derékszögű háromszögre vonatkozó magasság-tétel alapján

$$x^2 = a(D - a) \Longrightarrow x^2 = 736$$

Tehát

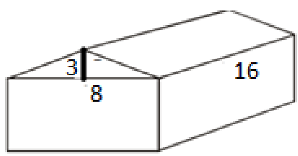
$$x \approx 27\ [mm].$$

10. feladat: Egy háztető metszete egyenlő szárú háromszög, melynek alapja *8 m*, az alapra bocsájtott magassága *3 m*. A tető hossza *16 m* (lásd az ábrán).

a) Hány m^2 cserép szükséges a tető befedéséhez?

b) Legfeljebb mekkora sugarú körablak helyezhető el a háromszögben?

c) Mekkora lesz egy ilyen ablak kerülete és területe?



Megoldás:

a) Jelölje a tető ferde oldalának hosszát (a háromszög szárát) x. Felhasználva, hogy az egyenlő szárú háromszög magassága egyúttal súlyvonal is, illetve a Pitagorasz-tételt, azt kapjuk, hogy

$$x^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Longrightarrow x = 5\ [m]$$

Akkor a két tetőlap összterülete

$$T = 2 \cdot (16 \cdot 5) = 160\ [m^2]$$

Tehát $160\ [m^2]$ cserép szükséges a tető befedéséhez.

b) A keresett kör a háromszögbe írt kör. A beírt kör sugara (r) és a háromszög területe (T) között fennáll a

$$T = p \cdot r$$

egyenlőség, ahol p – a háromszög félkerülete. A feladat feltétele szerint

$$p = \frac{8 + 2 \cdot 5}{2} = 9[m]$$

A háromszög minden oldalának ismeretében a terület Hérón-képletének segítségével kiszámítható:

$$T = \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-5) \cdot (9-8)} = \sqrt{144} = 12\ [m^2]$$

Akkor a háromszögbe legfeljebb

$$r = \frac{T}{p} \ \Rightarrow\ r = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}\ [m]$$

sugarú körablak helyezhető.

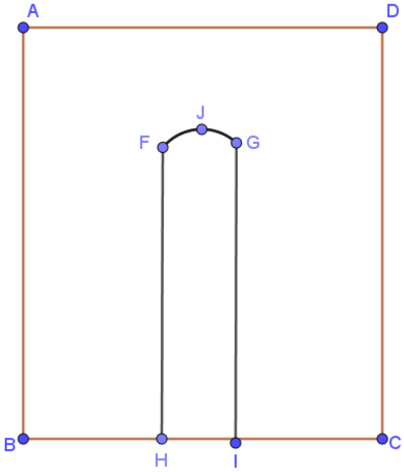
c) Ennek az ablaknak a kerülete

$$K_{körablak} = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \approx 8{,}37\ [m]$$

a területe pedig

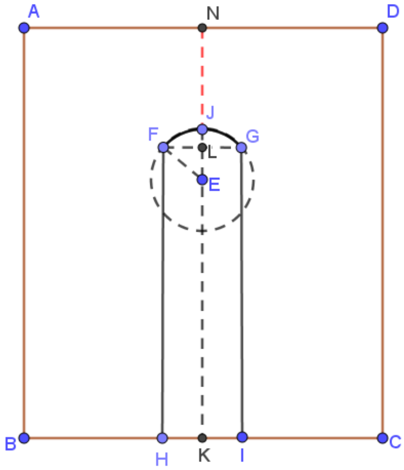
$$T_{körablak} = \pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \approx 5{,}58\ [m^2]$$

11. feladat: Az ábrán egy fal egy része látható. A FJG ív egy $1\ m$ sugarú körív, a $ABCD$ négyszög téglalap. Azz FH és GI szakaszok merőlegesek az HI szakaszra. $HF = GI = 2\ m,\ HI = 1{,}6\ m,\ AB = 2{,}75\ m.$ Számítsuk ki az J pont távolságát az AD mennyezetig!



Megoldás:

Megszerkesztjük az E középpontú, 1 m sugarú kört.



Akkor $R = FE = JE = 1\ m$, $FG = 1{,}6\ m$.

Feladatunk az NJ szakasz hosszának meghatározása.

Az FLE derékszögű háromszögben az $FL = \frac{FG}{2} = 0{,}8\ [m]$. Az LE befogót a Pitagorasz-tétel alapján meg tudjuk határozni:

$$LE = \sqrt{FE^2 - FL^2} \Longrightarrow LE = 0{,}6\ [m]$$

Akkor

$$R = JE = JL + LE \ \Longrightarrow\ JL = 1 - 0{,}6 = 0{,}4\ [m]$$

Minthogy $AB = NK$, ezért a keresett NJ szakasz hossza

$$NJ = NK - (JL + LK) \Longrightarrow \ NJ = 2{,}75 - (2 + 0{,}4) = 0{,}35\ [m]$$

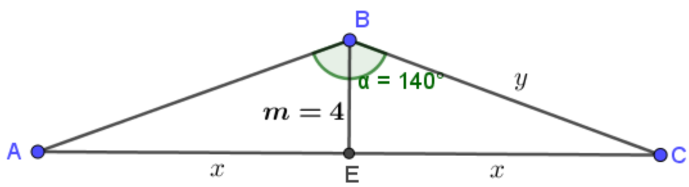
12. feladat: Egy függőleges tartórúdra a talajtól 4 m magasan mozgásérzékelőt szereltek, a hozzákapcsolt lámpa 140º-os nyílásszögű forgáskúpban világít függőlegesen lefelé.

a) Milyen messze van a lámpától a legtávolabbi megvilágított pont?

b) Megvilágítja-e az érzékelő lámpája azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától $15\ m$ m távolságra van?

c) A tartórúdon méterenként kampókat helyeztünk el, amelyekre fel tudjuk akasztani a mozgásérzékelő lámpáját. Alulról számítva hányadik kampót használjuk, ha azt akarjuk, hogy a vízszintes talajon ne világítson meg a lámpa $100\ m^2$ -nél nagyobb területet?

<u>Megoldás:</u>



a) A BC szakasz hosszát keressük. Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért a $CBE\angle = 70^0$ (a háromszög BE magassága egyben szögfelező és súlyvonal is). Akkor a BEC derékszögű háromszög BC befogója

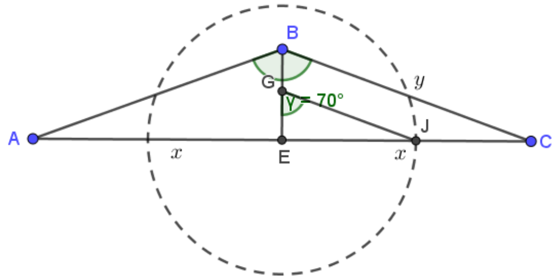
$$y = BC = \frac{4}{cos70^0} \approx 11{,}7\ [m].$$

b) A legtávolabbi megvilágított pont a talajon a rúd aljától (E pont) a C pont lesz. Akkor a BEC derékszögű háromszög EC befogója

$$x = EC = 4 \cdot tg70^0 \approx 11\ [m].$$

Tehát az érzékelő lámpája azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától $15\ m$ távolságra van már nem világítja meg.

c) A lámpa által a vízszintes talajon megvilágított terület egy E középpontú EJ sugarú kör alakú terület.



A feladat feltétele alapján ennek a körnek a területe nem lehet nagyobb $100\ m^2$-nél. Akkor

$$\pi r^2 \leq 100 \quad \Rightarrow r \leq \sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5{,}65\ [m].$$

A kérdéses kampó számát a GE magasság adja meg, ami a GEJ derékszögű háromszög egyik befogója. A másik befogója pedig a kör sugara. Mivel a $GEJ\Delta \sim BEC\Delta$, ezért a $EGJ\angle = 70^0$.

Ekkor

$$GE = \frac{EJ}{tg70^0} \quad \Rightarrow \quad GE = \frac{5{,}65}{tg70^0} \approx 2{,}05\ \ [m].$$

Tehát az első vagy a második kampóra kell akasztani az érzékelőt.

13. feladat: Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal $13\ cm$ hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya 2:1.

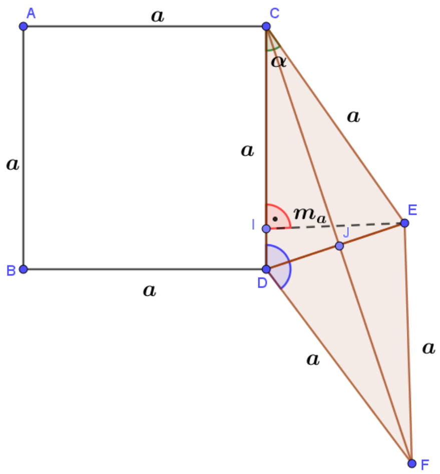
a) Mekkora a rombusz magassága?

b) Mekkorák a rombusz szögei?

c) Milyen hosszú a rombusz hosszabbik átlója? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

<u>Megoldás:</u>

Legyen a közös oldal $a = 13\ cm$.



a) A négyzet területe

$$T_{négyzet} = a^2,$$

a rombusz területe

$$T_{rombusz} = a \cdot m_a$$

A feladat feltétele alapján

$$\frac{a^2}{a \cdot m_a} = \frac{2}{1} \quad \Longrightarrow \quad m_a = 6{,}5 \ [cm].$$

b) A CIE derékszögű háromszögből

$$sin\alpha = \frac{m_a}{a} \quad \Longrightarrow \quad sin\alpha = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 30^0.$$

Akkor a rombusz másik szöge

$$CDF\angle = 180^0 - 30^0 = 150^0.$$

c) Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra és felezik a rombusz szögeit, ezért a CDJ derékszögű háromszögből

$$cos15^0 = \frac{CJ}{a} \Longrightarrow CJ = 13 \cdot cos15^0.$$

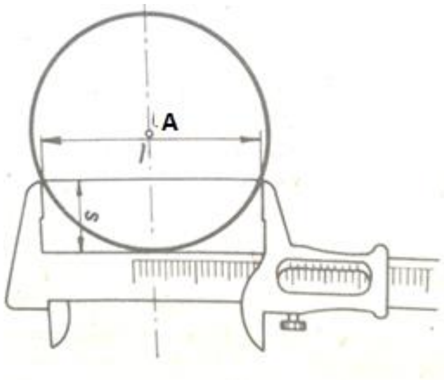
Akkor a rombusz hosszabbik átlója

$$CF = 2 \cdot CJ \approx 25{,}11 \ [cm].$$

14. feladat: Kör alakú tárgyak átmérőjének meghatározásához az ábrán látható tolómérőt használják. A tolómérő szárainak hossza $s = 25\ mm$.

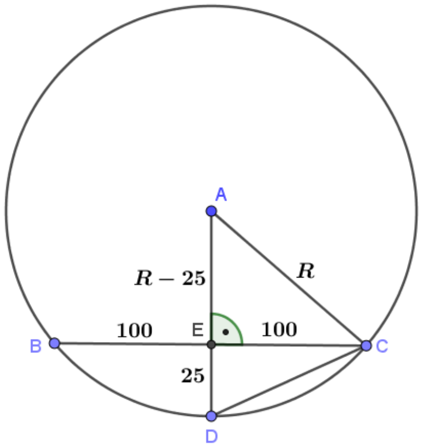
a) Határozzuk meg az átmérő hosszát, ha a tolómérő végpontjainak távolsága $l = 200\ mm$!

b) Határozzuk meg, hogyan függ a d átmérő s-től és l-től!



Megoldás:

a) Megszerkesztjük a kör $AD = AC = R$ sugarait (A- a kör középpontja), illetve a CD húrját. A kör sugara felezi a BC húrt, így $BE = EC = 100\ mm$.



Akkor az AEC derékszögű háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt

$$R^2 = (R - 25)^2 + 100^2.$$

Felhasználva, hogy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ és rendezve az egyenletet, a következő, az adottal ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$50R = 10625 \quad \Rightarrow R = 212{,}5\ [mm].$$

Akkor a kör átmérője

$$d = 2R = 425\ [mm].$$

b) Amennyiben az s és l szakaszok nem ismertek, akkor a kör átmérőjét a következő módon tudjuk megadni s és l függvényében: az AEC derékszögű háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt azt kapjuk, hogy

$$R^2 = (R-s)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Rendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$2Rs = \frac{4s^2 + l^2}{4}.$$

Innen

$$R = \frac{4s^2 + l^2}{8s} \Rightarrow d = 2R = \frac{4s^2 + l^2}{4s}.$$

Gyakorló feladatok

1. feladat: Az *ABC* hegyesszögű háromszögben $BC = 14\ cm, AC = 12\ cm,$ a *BCA* szög nagysága pedig 40^0.

a) Számítsa ki a *BC* oldalhoz tartozó magasság hosszát!

b) Számítsa ki az *AB* oldal hosszát!

Válaszait cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Az *AB* oldal felezőpontja legyen *E*, a *BC* oldal felezőpontja pedig legyen *D*. Határozza meg az *AEDC* négyszög területét! Válaszát cm^2-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

2. feladat: Az *ABCD* trapéz oldalainak hossza $AB = 10\ cm,\ CD = 6\ cm, AD = 7\ cm.$ Az *A* csúcsnál fekvő belső szög nagysága 70°.

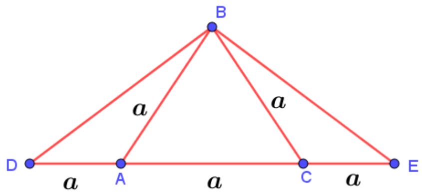
a) Mekkora távolságra van *D* a pont az *AB* oldaltól?

b) Számítsa ki a négyszög *AC* átlójának hosszát!

Az *E* pont az *AD* és *BC* szárak egyenesének metszéspontja.

c) Számítsa ki az *ED* szakasz hosszát!

3. feladat: Az ábrán lévő tetőszerkezeten mindegyik *a*-val jelölt gerenda egyenlő hosszúságú és *3,6 m*. Milyen hosszú a nem jelölt két gerenda?



9 TÉRGEOMETRIA

	Felszín (A)	Térfogat (V)
Kocka	$6a^2$	a^3
Téglatest	$2ab + 2ac + 2bc$	abc
Henger	$r \cdot \pi \cdot (2r + m)$	$r^2 \cdot \pi \cdot m$
Kúp	$r \cdot \pi \cdot (r + a)$	$\frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3}$
Gúla	$T_{alap} + T_{palást}$	$\frac{T_{alap} \cdot m}{3}$
Gömb	$4r^2 \cdot \pi$	$\frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$

1. feladat: Egy kocka felszíne $A = 54\ cm^2$. Adjuk meg az éleinek hosszát, a testátlójának nagyságát és a térfogatát!

Megoldás:

A kocka felszíne: $A = 6a^2$. Ezt felhasználva

$$6a^2 = 54 \Rightarrow a = 3.$$

A testátló hossza:

$$d = a \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}\,[cm].$$

A kocka térfogata:

$$V = a^3 = 3^3 = 27\ [cm^3].$$

2. feladat: Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek az aránya $1{:}\,2{:}\,3$, térfogata: $48\ cm^3$. Mekkorák a téglatest élei?

Megoldás:

A téglatest egy csúcsból kiinduló éleit jelöljük a, b, c −vel. Ekkor a térfogat

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Felhasználva, hogy $a = x, b = 2x, c = 3x$, azt kapjuk, hogy

$$V = a \cdot b \cdot c = x \cdot 2x \cdot 3x \Rightarrow 48 = 6x^3 \Rightarrow x = 2.$$

Tehát $a = 2\ cm, b = 4\ cm, c = 6cm.$

3. feladat: Egy henger alakú pohár alapkörének sugara 5 cm, a henger magassága $M = 5\ cm$. Belefér-e a pohárba 3 dl víz?

Megoldás:

A henger alakú pohár térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot \mathrm{M} = 25\pi \cdot 5 \approx 392{,}5\ cm^3 = 0{,}3925\ l = 3{,}95\ [dl].$$

Tehát belefér 3 dl víz.

4. feladat: Egy kúp alapkörének a sugara 3 cm, a kúp magassága 4 cm. Mekkora az alkotója és a térfogata?

Megoldás:

A Pitagorasz-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$r^2 + M^2 = a^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = a^2 \Rightarrow a = 5\ [cm].$$

A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3} = \frac{3^2 \cdot \pi \cdot 4}{3} \approx 37{,}7\ [cm^3].$$

5. feladat: Egy gömb felszíne 10 cm^2. Mekkora a térfogata?

Megoldás:

A gömb felszíne:

$$A = 4r^2 \cdot \pi \Rightarrow 10 = 4r^2 \cdot \pi \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2{,}5}{\pi}} \approx 0{,}89\ [cm].$$

A gömb térfogata:

$$V = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3} \approx 2{,}95\ [cm^3].$$

6. feladat: Szüreteléshez henger alakú, felül nyitott vaskádat kívül-belül lefestenek. A kád magassága és átmérője egyaránt $100\, cm$ és $1\, m^2$ lefestéshez $5\, dkg$ festéket használnak fel. Mennyi festéket kell venni, ha kétszer szükséges a kádat átfesteni? (A kádfal vastagságát elhanyagolhatjuk.)

Megoldás:

Első lépésben ki kell számolnunk a kád felszínét, ami az alaplap területének kétszerese és a palást területének összege. Az alaplap sugarát r –el, a magasságot m –mel jelölve azt kapjuk, hogy

$$A = r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot\ m = 50^2 \cdot \pi + 2 \cdot\ 50 \cdot \pi \cdot\ 100 =$$

$$= 12\,500\, \pi\, cm^2 \approx\ 39.250\ [cm^2].$$

A kád felszíne tehát $A = 39{,}25\, m^2$. A kád egyszeri lefestése esetén a lefestendő felület a kád felszínének kétszerese, azaz $78{,}5\, m^2$. A kádat kétszer festjük le, így a lefestendő felület összesen $157\, m^2$. Összesen tehát $157 \cdot\ 5 = 785\, dkg$, azaz 7,85 kg festéket kell felhasználnunk.

7. feladat: Új úszómedencénk alapja 3 méter sugarú kör. Mennyi idő alatt tudjuk megtölteni 1 méter magasan vízzel, ha a csapból percenként 30 liter víz folyik? Hány forinttal emelkedik az éves vízdíjunk, ha évente 5 –ször kell cserélni a vizet a medencében és 1 m^3 víz ára 600 forint?

Megoldás:

A medence térfogata a „szokásos" jelölések felhasználásával:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot\ m = 1{,}5^2 \cdot \pi \cdot\ 1 = 2{,}25\pi\, m^3 \approx\ 7{,}07\ [m^3],$$

így $V = 7\,070$ liter. Percenként 30 liter víz folyik át a csövön, így $\frac{7\,070}{30} = 236$ perc alatt telik meg a medence vízzel. Az éves vízdíjunk $600 \cdot\ 7{,}07 \cdot\ 5 = 21\,210$ forinttal emelkedik.

8. feladat: Egy $100 \times\ 40 \times\ 10\, mm$ méretekkel rendelkező aranyrudat szeretnénk vásárolni. Tudjuk, hogy 1 uncia aranyára 1000 dollár. (1 uncia=31,1 gramm). Az arany sűrűsége 19,3 $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$. Hány gramm egy ilyen aranyrúd tömege? Hány forintot ér az aranyrúd, ha 1 dollár 320 forint?

Megoldás:

Az aranyrúd térfogata:

$$V = 100 \cdot 40 \cdot 10 = 40\,000\,mm^3 = 40\,[cm^3].$$

Az aranyrúd tömege:

$$m = \rho \cdot V = 19{,}3 \cdot 40 = 772\,[g].$$

Az aranyrúd $\frac{772}{31{,}1} \approx$ 24,82 uncia tömegű, melynek ára

$$24{,}82 \cdot 1000 \cdot 320 = 7\,942\,400$$

forint.

9. feladat: Egy téglalap alakú kartonpapír oldalai 5 cm és 8 cm. A téglalap minden szélétől felhajtunk egy azonos szélességű sávot. Megoldható-e így, hogy a kapott test térfogata $260\ cm^3$ legyen?

Megoldás:

Ha a téglalap széleitől x cm szélességű sávot hajtunk fel, akkor a keletkezett téglatest térfogata:

$$V = (5 - 2x) \cdot (8 - 2x) \cdot x.$$

A zárójelek felbontása és az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$V = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

A feltétel szerint azt szeretnénk, hogy

$$V = 260$$

teljesüljön, tehát a

$$4x^3 - 26x^2 + 40x = 260$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$4x^3 - 26x^2 + 40x - 260 = 0.$$

Az első két tagból emeljünk ki $2x^2$ –et, a második két tagból pedig 20 –at:

$$2x^2 \cdot (2x - 13) + 20 \cdot (2x - 13) = 0.$$

A kapott egyenlet bal oldalán emeljünk ki $(2x - 13)$ $-$at:

$$(2x - 13) \cdot (2x^2 + 20) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így

$$2x - 13 = 0 \text{ vagy } 2\mathrm{x}^2 + 20 = 0.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = \frac{13}{2} = 6{,}5$, ami nem lehetséges, mert a téglalap egyik oldala csak 5 cm. A második egyenletből $x^2 = -10$ adódik, ami szintén nem lehetséges.

Azt kaptuk tehát, hogy nem lehetséges, hogy a test térfogata $260\ cm^3$ legyen.

10. feladat: Egy forrás óránként 50 hektoliter vizet ad. A forrásvizet henger alakú tartályba vezetik. Milyen magasságig telik meg a henger 6 óra alatt, ha a henger alapkörének átmérője 10 méter?

Megoldás:

A henger alapkörének sugara 5 méter, a henger térfogata 5 m^3, így:

$$5 = 5^2 \cdot \pi \cdot M \Rightarrow M = \frac{0{,}5}{\pi} \approx 0{,}06369\ [m].$$

Tehát 6 óra alatt

$6 \cdot 0{,}06369 = 0{,}38214$ méter magasság telik meg a tartály.

Gyakorló feladatok

1.feladat: Egy gömb térfogata $100\ cm^3$. Mekkora a felszíne?

2.feladat: Egy henger térfogata $500\ cm^3$. A henger alapkörének sugara $5\ cm$. Mekkora a henger magassága?

3.feladat: Egy kocka térfogata $100\ cm^3$. Mekkora a felszíne?

10 STATISZTIKA

<u>Elméleti összefoglaló:</u>

a) Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ adott valós számok (mintaelemek). Ekkor:

(számtani) átlag (közép): $$A = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$	A 2,3,4,5 számok számtani közepe: $$A = \bar{x} = \frac{2+3+4+5}{4} = 3{,}5.$$
súlyozott számtani átlag (közép): $$\frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$	Egy társaságban 5 fiú és 8 lány van. A fiúk átlagmagassága 175 centiméter, a lányok átlagmagassága 170 centiméter. A teljes társaság átlagmagassága: $$\frac{5 \cdot 175 + 8 \cdot 170}{5+8} = \frac{2\,235}{13} \approx 171{,}92\ cm.$$
mértani (geometriai) átlag (közép): $$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$	A 2,3,4,5 számok mértani közepe: $$G = \sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \sqrt[4]{120} \approx 3{,}31.$$
harmonikus átlag (közép): $$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$	A 2,3,4,5 számok harmonikus közepe: $$H = \frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = 4 \cdot \frac{60}{77} = \frac{240}{77}.$$
négyzetes átlag (közép): $$N = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$	A 2,3,4,5 számok négyzetes közepe: $$N = \sqrt{\frac{2^2+3^2+4^2+5^2}{4}} = \sqrt{\frac{27}{2}}.$$

Megjegyezzük, hogy ugyanazon nem-negatív számok számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepei között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$H \le G \le A \le N.$$

Tehát ugyanazon számok esetén négy nevezetes középérték közül a legkisebb a harmonikus közép és a legnagyobb a négyzetes közép értéke.

b) Medián, módusz, terjedelem:

medián: növekvő sorba rendezett minta esetén, ha a minta elemszáma páratlan, akkor a középső elem, ha a minta elemszáma páros, akkor a két középső elem átlaga	Az 1,2,3,4,5 mint mediánja: 3. Az 1,2,3,4 minta mediánja: $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$.
módusz: a legtöbbször előforduló mintaelem(ek)	Az 1,2,2,3,4,4,4 minta módusza: 4. Az 1,2,3,3,4,4 minta módusza 3 és 4.
terjedelem: a legnagyobb és legkisebb mintaelemek különbsége	Az 1,2,3,4,5,6,7,8,8,8,8,9,9,9,9 minta terjedelme: $9 - 1 = 8$.

c) Szórásnégyzet, szórás, átlagos abszolút eltérés:

szórásnégyzet: az átlagtól való eltérések négyzetének az átlaga; annak a mérőszáma, hogy a mintaelemek mennyire vannak „közel'' az átlaghoz; kiszámítási képlete: $s^2 = \frac{(\bar{x}-x_1)^2 + (\bar{x}-x_2)^2 + \cdots + (\bar{x}-x_n)^2}{n}$	Az 1,1,2,2 minta átlaga: $\bar{x} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{4} = 1{,}5.$ A minta szórásnégyzete: $s^2 = \frac{(1{,}5-1)^2 \cdot 2 + (1{,}5-2)^2 \cdot 2}{4} = \frac{0{,}25 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 2}{4} = \frac{1}{4}.$
szórás: a szórásnégyzetből vont négyzetgyök, jele: s	Az előbbi minta szórása: $s = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$
átlagos abszolút eltérés: $\frac{\lvert\bar{x}-x_1\rvert^2 + \lvert\bar{x}-x_2\rvert^2 + \cdots + \lvert\bar{x}-x_n\rvert^2}{n}$	Az 1,1,2,2 minta átlagos abszolút eltérése: $\frac{\lvert 1{,}5-1\rvert \cdot 2 + \lvert 1{,}5-2\rvert \cdot 2}{4} = \frac{1}{2}.$

1. feladat: Egy ötelemű statisztikai minta négy eleme: 2; 5; 7 és 8. Határozzuk meg a hiányzó mintaelemet úgy, hogy a minta átlaga 6 legyen! Adjuk meg a minta mediánját, móduszát és terjedelmét!

Megoldás:

A minta hiányzó elemét jelöljük x −el. Ekkor a minta átlaga

$$\frac{2+5+7+8+x}{5}=6.$$

Az összevonást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{22+x}{5}=6.$$

A kapott egyenletet a közös nevezővel szorozva

$$22+x=30$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy a hiányzó mintaelem: $x=8$.

A kapott minta mediánja 7, módusza: 8, terjedelme: $8-2=6$.

2. feladat: A fizika órán a tanulók kísérletet végeztek és tömegmérés volt a feladat. Tizenöt tanuló végzett méréseket és az alábbi eredményeket kapták gramm pontossággal:

$$15; 14; 14; 15; 13; 13; 14; 14; 15; 16; 15; 14; 15; 14; 13.$$

a) Készítsünk gyakorisági táblázatot!
b) Adjuk meg a minta átlagát egész grammra kerekítve!
c) Határozzuk meg a mediánt, a móduszt és a terjedelmet!
d) Számoljuk ki a szórásnégyzetet és a szórást!

Megoldás:

a)

érték	13	14	15	16
gyakoriság	3	6	5	1

b) A minta átlaga

$$\bar{x}=\frac{3\cdot 13+6\cdot 14+5\cdot 15+1\cdot 16}{15}\approx 14.$$

c) A medián: 14, a módusz: 14, a terjedelem: 16-13=3.

d) A szórásnégyzet:

$$s^2 = \frac{(14-13)^2 \cdot 3 + (14-14)^2 \cdot 6 + (14-15)^2 \cdot 5 + (14-16)^2}{15}$$
$$= \frac{3+0+5+4}{15} = \frac{12}{15} = 0{,}8.$$

A szórás: $s = \sqrt{s^2} = 0{,}89.$

3. feladat: Egy anyag hőmérsékletét megmérték 10 különböző időpillanatban. Időrendben az alábbi eredmények adódtak:

$$2; 2; 1; 3; 5; 5; 5; 4; 4; 5.$$

a) Készítsünk gyakorisági táblázatot!
b) Adjuk meg a minta átlagát!
c) Határozzuk meg a mediánt, a móduszt és a terjedelmet!
d) Számoljuk ki a szórásnégyzetet és a szórást!

Megoldás:

a)

érték	1	2	3	4	5
gyakoriság	1	2	1	2	4

b) A minta átlaga

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4}{10} = 3{,}6.$$

c) A medián: 4, a módusz: 5, a terjedelem: 5-1=4.

d) A szórásnégyzet:

$$s^2 = \frac{(3{,}6-1)^2 + (3{,}6-2)^2 \cdot 2 + (3{,}6-3)^2 + (3{,}6-4)^2 \cdot 2 + (3{,}6-5)^2 \cdot 4}{10}$$
$$= \frac{2{,}6^2 + 1{,}6^2 \cdot 2 + 0{,}6^2 + 0{,}4^2 \cdot 2 + 1{,}4^2 \cdot 4}{10} = \frac{36}{15} \approx 2{,}27.$$

A szórás: $s = \sqrt{s^2} = 1{,}51.$

4. feladat: Egy ötelemű minta három eleme: 1; 3; 4. Határozzuk meg a hiányzó két elemet úgy, hogy a minta átlaga 3, szórásnégyzete 1,2 legyen!

Megoldás:

A hiányzó két mintaelemet jelölje x és y. Ekkor a minta átlagára vonatkozó feltétel miatt azt kapjuk, hogy:

$$\frac{1+3+4+x+y}{5}=3.$$

A szórásnégyzetre vonatkozó feltétel miatt

$$\frac{(3-1)^2+(3-3)^2+(3-4)^2+(3-x)^2+(3-y)^2}{5}=1{,}2$$

adódik.

Az első egyenletből összevonás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{8+x+y}{5}=3.$$

A közös nevezővel szorozva az egyenlet mindkét oldalát, majd az egyenletet rendezve

$$8+x+y=15 \ \Rightarrow x+y=7$$

adódik.

A második egyenletben elvégezve a zárójelek felbontását azt kapjuk, hogy

$$\frac{4+0+1+9-6x+x^2+9-6y+y^2}{5}=1{,}2.$$

Elvégezve az összevonást és az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel, azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2+y^2-6x-6y+23}{5}=1{,}2 \Rightarrow x^2+y^2-6x-6y+17=0.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$x^2+y^2-6x-6y+17=0$$

$$x+y=7.$$

A második egyenletből kifejezve az y –t azt kapjuk, hogy $y=7-x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$x^2+(7-x)^2-6x-6\cdot(7-x)+17=0$$

adódik. A nevezetes azonosság és a zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x^2+49-14x+x^2-6x-42+6x+17=0.$$

Összevonás után

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

adódik. Az egyenlet mindkét oldalát 2 $-$vel osztva azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}.$$

Tehát $x_1 = 3$, illetve $x_2 = 4$. A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy $y_1 = 7 - 3 = 4$, illetve $y_2 = 7 - 4 = 3$. A hiányzó két mintaelem tehát a 3 és a 4. A minta tehát: $1; 3; 3; 4; 4$.

5. feladat: Egy osztály matematika dolgozatot írt. Öt tanuló dolgozata jeles, tíz tanuló dolgozata jó, három tanuló dolgozata elégséges, két tanuló dolgozata elégtelen lett. Hányan írtak közepes dolgozatot, ha azt is tudjuk, hogy az osztály átlaga 3,41-től nagyobb, de 3,42-től kisebb lett?

<u>Megoldás:</u>

Jelöljük x $-$el azon tanulók számát, akik közepes eredményű dolgozatot írtak. Az osztály átlaga:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + x \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{20 + x} = \frac{73 + 3x}{20 + x}.$$

A feltétel szerint

$$3{,}41 < \frac{73 + 3x}{20 + x} < 3{,}42.$$

Minden oldalt $20 + x > 0$ $-$val szorozva azt kapjuk, hogy

$$3{,}41 \cdot (20 + x) < 73 + 3x < 3{,}42 \cdot (20 + x).$$

A zárójelek felbontása után

$$68{,}2 + 3{,}41x < 73 + 3x < 68{,}4 + 3{,}42x$$

adódik. Az egyik egyenlőtlenség:

$$68{,}2 + 3{,}41x < 73 + 3x.$$

Kivonva mindkét oldalból $68{,}2$ $-$t és $3x$ $-$et, azt kapjuk, hogy

$$0{,}41x < 4{,}8 \Rightarrow x < 11{,}71.$$

A másik egyenlőtlenség:

$$73 + 3x < 68{,}4 + 3{,}42x.$$

Kivonva mindkét oldalból $68{,}4$ –et és $3x$ –et, azt kapjuk, hogy

$$0{,}42x > 4{,}6 \Rightarrow x > 10{,}95.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $10{,}95 < x < 11{,}71$. Mivel az x egész szám, ezért $x = 11$ adódik, tehát 11 tanuló írt közepes dolgozatot.

6. feladat: Számoljuk ki a 9 és 4 számok számtani közepét, mértani közepét, harmonikus közepét és négyzetes közepét!

Megoldás:

A megadott számok számtani közepe:

$$A = \frac{a+b}{2} = \frac{9+4}{2} = 6{,}5,$$

mértani közepe:

$$G = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6,$$

harmonikus közepe:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{4+9}{36}} = \frac{2}{\frac{13}{36}} = \frac{72}{13},$$

négyzetes közepe:

$$N = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{9^2+4^2}{2}} = \sqrt{\frac{81+16}{2}} = \sqrt{\frac{97}{2}} = \sqrt{48{,}5} \approx 6{,}96.$$

7. feladat: Két pozitív szám számtani közepe 8, mértani közepe 4,8. Adjuk meg a két számot!

Megoldás:

Legyen az egyik szám a, a másik szám b. Ekkor

$\frac{a+b}{2} = 8$ és $\sqrt{a \cdot b} = 4{,}8$. Az első egyenletet szorozzuk 2-vel, a második egyenletet emeljük négyzetre. Ekkor azt kapjuk, hogy

$a + b = 16$ és $a \cdot b = 23{,}04$. Az első egyenletből kifejezve a b ismeretlent azt kapjuk, hogy $b = 16 - a$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$(16 - a) \cdot a = 23{,}04$$

adódik. A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$16a - a^2 = 23{,}04.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$a^2 - 16a + 23{,}04 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenletet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$a_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 4 \cdot 23{,}04}}{2} = \frac{16 \pm 12{,}8}{2}.$$

Tehát $a_1 = 14{,}4$, valamint $a_2 = 1{,}6$. A kapott eredményeket felhasználva

$b_1 = 16 - 14{,}4 = 1{,}6$, illetve $b_2 = 16 - 1{,}6 = 14{,}4$. Tehát a keresett számok 1,6 és 14,4.

8. feladat: Két pozitív szám számtani közepe 10, mértani közepe 8. Adjuk meg a két számot! Adjuk meg a számok harmonikus közepét és négyzetes közepét!

<u>Megoldás:</u>

Legyen az egyik szám a, a másik szám b. Ekkor $\frac{a+b}{2} = 10$ és $\sqrt{a \cdot b} = 8$. Az első egyenletet szorozzuk 2-vel, a második egyenletet emeljük négyzetre. Ekkor azt kapjuk, hogy $a + b = 20$ és $a \cdot b = 64$.

Az első egyenletből kifejezve a b ismeretlent azt kapjuk, hogy $b = 20 - a$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$(20 - a) \cdot a = 64$$

adódik. A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$20a - a^2 = 64.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$a^2 - 20a + 64 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenletet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$a_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 64}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2}.$$

Tehát $a_1 = 16$, valamint $a_2 = 4$. A kapott eredményeket felhasználva

$b_1 = 20 - 16 = 4$, illetve $b_2 = 20 - 4 = 16$. Tehát a keresett számok 4 és 16.

A számok harmonikus közepe:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{2}{\frac{5}{16}} = \frac{32}{5} = 6{,}4.$$

A számok négyzetes közepe:

$$N = \sqrt{\frac{4^2 + 16^2}{2}} = \sqrt{\frac{16 + 256}{2}} = \sqrt{\frac{272}{2}} = \sqrt{136} \approx 11{,}66.$$

A nevezetes középértékek között valóban fennáll az elméleti összefoglalóban ismertetett

$$H = 6{,}4 \leq G = 8 \leq A = 10 \leq N \approx 11{,}64$$

összefüggés.

9. feladat: Egy kutató laboratóriumban 50 személy dolgozik. A 30 év alattiak átlagkeresete 148 000 forint, míg a 30 év felettiek átlagkeresete 173 000 forint. A laborban dolgozók átlagkeresete 165 000 forint. Határozzuk meg, hogy hány 30 év alatti és hány 30 év feletti személy dolgozik a laborban?

Megoldás:

Jelöljük a 30 év alattiak számát x –el, a 30 év felettiek számát y –al. Ekkor

$$\frac{x \cdot 148\,000 + y \cdot 173\,000}{x + y} = 165\,000.$$

Azt is tudjuk továbbá, hogy $x + y = 50$, amiből azt kapjuk, hogy $y = 50 - x$. Ezt behelyettesítve az előbbi egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x \cdot 148\,000 + (50 - x) \cdot 173\,000 = 165\,000 \cdot 50.$$

Az egyszerűbb számolás kedvéért az egyenletet osszuk el 1 000 –el:

$$148x + (50 - x) \cdot 173 = 165 \cdot 50.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$148x + 8\,650 - 173x = 8\,250.$$

Összevonás után $-25x + 8\,650 = 8\,250$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$-25x = -400 \Rightarrow x = 16.$$

10. feladat: Egy négyelemű minta három eleme: 2; 4; 9. Határozzuk meg a negyedik elemet úgy, hogy a négy mintaelem szórásnégyzete a lehető legkisebb legyen!

Megoldás:

A negyedik mintaelemet jelöljük x –el. Ekkor a négy mintaelem átlaga

$$\frac{2+4+9+x}{4} = \frac{15+x}{4}.$$

A mintaelemek szórásnégyzete:

$$s^2 = \frac{\left(\frac{15+x}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{15+x}{4} - 4\right)^2 + \left(\frac{15+x}{4} - 9\right)^2 + \left(\frac{15+x}{4} - x\right)^2}{4}.$$

Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$s^2 = \frac{\left(\frac{7+x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x-21}{4}\right)^2 + \left(\frac{15-3x}{4}\right)^2}{4}.$$

A zárójelek felbontása után

$$s^2 = \frac{49 + 14x + x^2 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 42x + 441 + 225 - 90x + 9x^2}{64}$$

adódik. Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$s^2 = \frac{12x^2 - 120x + 716}{64}.$$

Tehát az

$$f(x) = \frac{12x^2 - 120x + 716}{64}$$

függvény minimum helyét keressük, aminek pontosan azon a helyen van minimuma, mint a $g(x) = 12x^2 - 120x + 716$ függvénynek.

A $g(x)$ függvényt teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$g(x) = 12 \cdot (x^2 - 10x) + 716 = 12 \cdot [(x-5)^2 - 25] + 716,$

aminek akkor a legkisebb az értéke, ha $x = 5$. Tehát a hiányzó mintaelem: 5.

Gyakorló feladatok

1. feladat: Tekintsük az alábbi mintaelemeket:

$$1; 2; 4; 5; 6; 3; 4; 3; 4; 5; 6; 1; 2; 2; 3; 4; 5; 6; 5; 4; 4.$$

Adjuk meg a minta átlagát, mediánját, móduszát, terjedelmét, szórásnégyzetét és szórását! Készítsünk oszlopdiagramot és kördiagramot!

2. feladat: Egy öt elemű statisztikai minta három eleme: 2; 5 és 6. A minta átlaga: 4, szórásnégyzete: 2,8. Határozzuk meg a hiányzó két mintaelemet! Adjuk meg a minta mediánját és móduszát!

3. feladat: Adjuk meg az $f(x) = -|x-2| + 3$ függvény helyettesítési értékeit az $x = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Határozzuk meg a kapott elemekből képzett statisztikai minta terjedelmét, átlagát, mediánját és szórását!

11 KOMBINATORIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Elméleti összefoglaló:

a) Kombinatorikai alapfeladatok:

A következő táblázatban az összes elemek száma n, amiből kiválasztunk k darabot. Az ismétléses permutáció esetében az n darab elemből $k_1, k_2, \dots, k_r$ darab azonos úgy, hogy $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Az alábbi táblázatban az „ismétlés nélküli” eset azt jelenti, hogy egy elemet csak egyszer használhatunk fel. Az „ismétléses” eset azt jelenti, hogy egy elemet többször is felhasználhatunk. A ciklikus permutáció azt jelenti, hogy hányféleképpen lehet sorba rendezni például egy kör alakú asztal mellett helyet foglaló társaságot. Ilyenkor azokat az eseteket, amelyek forgatással egymásba vihetőek, nem különböztetjük meg. A táblázat tartalmazza, hogy az egyes kombinatorikai alapfeladatokban mennyi az összes lehetőségek száma.

	Permutáció	Variáció	Kombináció
	n darab elem sorbarendezése	n darab elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje számít	n darab elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít
Ismétlés nélküli	$n!$	$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n - k + 1)$	$\binom{n}{k}$
Ismétléses	$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ciklikus	$(n-1)!$	–	–

A táblázatban az $\binom{n}{k}$ az úgynevezett binomiális együttható, amelynek definíciója:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Az alábbi táblázatban a fenti táblázatban szereplő kombinatorikai alapfeladatokra mutatunk példákat:

	Permutáció	Variáció	Kombináció
Ismétlés nélküli	Hányféleképpen rendezhető sorba 5 különböző golyó? $5! = 120$	Hányféleképpen lehet az 1,2,3,4 számjegyekből kétjegyű számot képezni, ha egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel? $4 \cdot 3 = 12$	Hányféleképpen tölthető ki a hatoslottó szelvénye? (45 számból választunk ki 6-ot). $\binom{45}{6} = 8\,145\,060.$
Ismétléses	Hányféleképpen rendezhető sorba 2 piros és 3 fehér színű golyó? $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$	Hányféleképpen lehet az 1,2,3,4 számjegyekből kétjegyű számot képezni, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk? $4 \cdot 4 = 16$	Egy nyereménysorsoláson 3 egyforma nyereményt sorsolnak ki 8 személy között. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy személy többet is kaphat? $\binom{8+3-1}{3} = \binom{11}{3}$ $= 165$
Ciklikus	Hányféleképpen helyezkedhet el egy kör alakú asztalnál egy hat fős társaság? $(6-1) = 5!$ $= 120$	–	–

b) Egy esemény valószínűségét úgy számolhatjuk ki, hogy az esemény számára kedvező esetek számát elosztjuk az összes esetek számával.

Ha A egy tetszőleges esemény, akkor

$$P(A) = \frac{kedvező\ esetek\ száma}{összes\ estek\ száma}.$$

1. feladat: Anna, Bea, Csaba, Dani, Enikő és Feri moziba mennek. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé egy sorba?

Megoldás:

Az első helyre ülhet a 6 személy bármelyike, a második helyre nem ülhet az, aki az első helyre ült, így oda már csak 5 személy ülhet, a harmadik helyre nem ülhet az, aki az első két helyre ült, és így tovább. Tehát az összes lehetőségek száma:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$$

2. feladat: Anna, Bea, Csaba, Dani, Enikő és Feri moziba mennek. Anna és Csaba nem beszélnek egymással, így nem szeretnének egymás mellé ülni. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé egy sorba?

Megoldás:

Az összes 6! lehetőségből (lásd előző feladat) levonjuk azon esetek számát, amikor Anna és Csaba egymás mellett ülnek. Ilyenkor formálisan a két személyt egynek tekintjük, így Anna és Csaba

$$5! \cdot 2 = 120 \cdot 2$$

féleképpen ülhetnek egymás mellett, hiszen Anna és Csaba egymás mellett kétféleképpen helyezkedhet el. Tehát azon esetek száma, amikor Anna és Csaba nem ül egymás mellé:

$$6! - 5! \cdot 2 = 720 - 240 = 480.$$

3. feladat: Hányféleképpen lehet sorba rendezni 3 piros, 4 fehér és 2 zöld golyót?

Megoldás:

Az ismétléses permutáció képletét alkalmazva az összes lehetőségek száma:

$$\frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1\ 260.$$

4. feladat: Hányféleképpen lehet sorba rendezni a MATEMATIKA szó betűit? (Nem feltétlenül értelmes szót szeretnének kapni.)

Megoldás:

A MATEMATIKA szó összesen 10 betűből áll, amelyben több azonos betű is megtalálható. Van 2 darab M betű, 3 darab A betű és 2 darab T betű. Az ismétléses permutáció képletét alkalmazva az összes lehetőségek száma:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151\,200.$$

5. feladat: Egy szabályos pénzérmét nyolcszor feldobunk. Hány olyan eset van, amikor 3 fej és 5 írás az eredmény?

Megoldás:

A kérdés valójában az, hogy hányféleképpen lehet sorba rendezni 3 fejet és 5 írást. Tehát ez egy ismétléses permutáció, így az összes lehetőségek száma:

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$$

6. feladat: Egy futóversenyen 10 induló van. Hányféleképpen állhatnak fel a dobogóra?

Megoldás:

A 10 versenyzőből az első 3-et szeretnénk kiválasztani. Az a kérdés, hogy ezt hányféleképpen tehetjük meg. Nyilvánvalóan a kiválasztás sorrendje számít, hiszen nem mindegy, hogy ki áll a dobogó első fokán, ki áll a második fokán és ki áll a harmadik fokán. Tehát az összes kiválasztások száma:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

7. feladat: Egy autóversenyen 20 induló van. Hányféleképpen alakulhat ki az első 4 helyezett sorrendje?

Megoldás:

A 20 versenyzőből az első 4-et szeretnénk kiválasztani. Az a kérdés, hogy ezt hányféleképpen tehetjük meg. Nyilvánvalóan a kiválasztás sorrendje számít, hiszen nem mindegy, hogy ki áll az első helyen, ki áll a második helyen, ki áll a harmadik helyen és ki áll a negyedik helyen. Tehát az összes kiválasztások száma:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116\,280.$$

8. feladat: Régen a magyar autók rendszámtáblája 2 betűből és 4 számjegyből állt. Jelenleg az autók rendszámtáblája 3 betűből és 3 számjegyből áll. Hányszorosa az „új'' típusú rendszámtáblák száma a „régi'' típusú rendszámtáblák számának? (A betűkből 26 féle betűt használhatunk fel és minden lehetőséget megengedünk.)

Megoldás:

A régi típusú rendszámtáblák száma:

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6\,760\,000.$$

Az új típusú rendszámtáblák száma:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000.$$

A kapott eredmények hányadosát képezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{17\,576\,000}{6\,760\,000} = 2{,}6.$$

Tehát 2,6-szer több rendszámtábla képezhető jelenleg, mint régen.

9. feladat: Hány darab 3-jegyű szám képezhető az 1,2,3,4,5,6 számjegyekből, ha egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel?

Megoldás:

Mivel számokat képezünk, ezért számít a kiválasztott elemek sorrendje, így az összes lehetőségek száma:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

10. feladat: Hány darab 3-jegyű szám képezhető az 1,2,3,4,5,6 számjegyekből, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

Megoldás:

Mivel számokat képezünk, ezért számít a kiválasztott elemek sorrendje, így az összes lehetőségek száma:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$

11. feladat: Hány darab 4-gyel osztható 3-jegyű szám képezhető az 1,2,3,4,5 számjegyekből, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

Megoldás:

Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám osztható 4-gyel, így az utolsó két számjegy lehetőségei: 12, 24, 32, 44, 52. Az első számjegy az 5 számjegy bármelyike lehet, így az összes lehetőségek száma: $5 \cdot 5 = 25$.

12. feladat: Hány darab 3 sávos zászló készíthető a piros, zöld, fehér, kék, sárga színek felhasználásával, ha minden sáv különböző színű?

Megoldás:

A kiválasztás sorrendje számít, hiszen például a piros-fehér-zöld és a zöld-fehér-piros zászló két különböző nemzet zászlója. A feladat feltétele miatt egy szín csak egyszer szerepelhet a kiválasztásban. így az összes lehetőségek száma:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

13. feladat: Hány darab 3 sávos zászló készíthető a piros, zöld, fehér, kék, sárga színek felhasználásával, ha két egymás melletti sáv nem lehet azonos színű?

Megoldás:

A kiválasztás sorrendje számít, hiszen például a piros-fehér-zöld és a zöld-fehér-piros zászló két különböző nemzet zászlója. A feladat feltétele miatt a második sáv nem lehet azonos színű az elsővel, de lehet azonos színű a harmadikkal. Az összes lehetőségek száma:

$$5 \cdot 4 \cdot 4 = 80.$$

14. feladat: Egy nyereménysorsoláson 10 személy között kisorsolnak 4 különböző nyereménytárgyat. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy személy csak egyet kaphat?

Megoldás:

Mivel a nyereménytárgyak különbözőek, ezért számít a sorsolás sorrendje. Mivel egy személy csak egy nyereménytárgyat kaphat, ezért az összes lehetőségek száma:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040.$$

15. feladat: Egy nyereménysorsoláson 10 személy között kisorsolnak 4 különböző nyereménytárgyat. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy személy többet is kaphat?

Megoldás:

Mivel a nyereménytárgyak különbözőek, ezért számít a sorsolás sorrendje. Mivel egy személy több nyereménytárgyat is kaphat, ezért az összes lehetőségek száma:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000.$$

16. feladat: Hányféleképpen tölthető ki a totószelvény?

Megoldás:

A totón 13+1=14 helyre választhatjuk az 1, 2, x lehetőségek valamelyikét. Mivel az is számít, hogy melyik helyre melyik lehetőséget választjuk és lehetnek egyforma választások is, ezért ez egy ismétléses variáció. Az összes lehetőségek száma:

$$3^{14} = 4\,782\,969.$$

17. feladat: Fagylaltot szeretnénk vásárolni és 7 féle fagyiból választhatunk. Háromgömbös fagyit szeretnénk venni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a fagylaltot tölcsérbe kérjük (azaz számít a kiválasztás sorrendje) és egy féle fagylaltból csak egyet választhatunk?

Megoldás:

Mivel számít a kiválasztás sorrendje és egyféléből csak egyet választhatunk, ezért ez egy ismétlés nélküli variáció. Az összes lehetőségek száma:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

18. feladat: Fagylaltot szeretnénk vásárolni és 7 féle fagyiból választhatunk. Háromgömbös fagyit szeretnénk venni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a fagylaltot tölcsérbe kérjük (azaz számít a kiválasztás sorrendje) és egy féle fagylaltból többet is választhatunk?

Megoldás:

Mivel számít a kiválasztás sorrendje és egyféléből többet is választhatunk, ezért ez egy ismétléses variáció. Az összes lehetőségek száma:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = 343.$$

19. feladat: Hányféleképpen tölthető ki az ötöslottó szelvénye?

Megoldás:

Az ötöslottó esetén 90 számból kell kiválasztanunk 5 számot. A kiválasztás sorrendje nem számít és egy számot csak egyszer választhatunk, így ez egy ismétlés nélküli kombináció. Az összes lehetőségek száma:

$$\binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

20. feladat: Egy nyereménysorsoláson 10 személy között kisorsolnak 4 egyforma nyereménytárgyat. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy személy csak egyet kaphat?

Megoldás:

Mivel a nyereménytárgyak egyformák, ezért a sorsolás sorrendje nem számít. Mivel egy személy csak egy nyereménytárgyat kaphat, ezért az összes lehetőségek száma:

$$\binom{10}{4} = 210.$$

21. feladat: Egy nyereménysorsoláson 10 személy között kisorsolnak 4 egyforma nyereménytárgyat. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy személy többet is kaphat?

Megoldás:

Mivel a nyereménytárgyak egyformák, ezért nem számít a sorsolás sorrendje. Mivel egy személy több nyereménytárgyat is kaphat, ezért az összes lehetőségek száma:

$$\binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715.$$

22. feladat: Fagylaltot szeretnénk vásárolni és 7 féle fagyiból választhatunk. Háromgömbös fagyit szeretnénk venni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a fagylaltot kehelybe kérjük (azaz nem számít a kiválasztás sorrendje) és egy féle fagylaltból csak egyet választhatunk?

Megoldás:

Mivel a kiválasztás sorrendje nem számít és egyféléből csak egyet
választhatunk, ezért ez egy ismétlés nélküli kombináció. Az összes lehetőségek száma:

$$\binom{7}{3} = 35.$$

23. feladat: Fagylaltot szeretnénk vásárolni és 7 féle fagyiból választhatunk. Háromgömbös fagyit szeretnénk venni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a fagylaltot kehelyben kérjük (azaz nem számít a kiválasztás sorrendje) és egy féle fagylaltból többet is választhatunk?

Megoldás:

Mivel a kiválasztás sorrendje nem számít és egyféléből csak többet is választhatunk, ezért ez egy kombináció variáció. Az összes lehetőségek száma:

$$\binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3} = 84.$$

24. feladat: Hány 3 elemű részhalmaza van egy 7 elemű halmaznak?

Megoldás:

A kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet csak egyszer választhatunk ki, így ez egy ismétlés nélküli kombináció. Az összes lehetőségek száma:

$$\binom{7}{3} = 35.$$

25. feladat: Van 7 üveg vörös borunk és 3 üveg fehér borunk. Hányféleképpen lehet kiválasztani 5 üveg bort úgy, hogy pontosan 3 vörös legyen közöttük?

Megoldás:

Összesen 5 üveg bort kell kiválasztanunk, amiből 3 legyen vörös, akkor 2 üveg fehér bornak kell lenni. Az összes lehetőségek száma:

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2} = 35 \cdot 3 = 105.$$

26. feladat: Egy 7 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás történt?

Megoldás:

Az összes kézfogások száma:

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

27. feladat: Egy dobozban 20 fehér golyó van. Hány piros golyót tegyünk a dobozba, ha azt szeretnénk, hogy a piros golyó húzásának valószínűsége (egy golyót kihúzva) 0,8-nél nagyobb legyen?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy a piros golyók száma x. Ekkor az összes golyók száma: $20 + x$, ami az összes esetek száma. A kedvező esetek száma: x. Legyen A az alábbi esemény:

$$A = \{egy\ golyót\ kihúzva\ piros\ golyót\ húzunk\}.$$

Az esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{x}{20 + x}.$$

Tehát meg kell oldanunk az

$$\frac{x}{20 + x} > 0{,}8$$

egyenletet. Megjegyezzük, hogy törtes egyenlőtlenséget általános esetben nem szabad szorozni a közös nevezővel, mert nem tudjuk, hogy az pozitív vagy negatív szám-e. Jelen esetben azonban a nevezőben biztosan pozitív, hiszen $x > 0$. Tehát a közös nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$x > 0{,}8 \cdot (20 + x).$$

A zárójel felbontása

$$x > 16 + 0{,}8x$$

adódik. Az egyenlőtlenséget rendezve azt kapjuk, hogy

$$0{,}2x > 16,$$

tehát

$$x > 80.$$

Tehát legalább 81 piros golyót kell a dobozba tenni.

28. feladat: Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Megoldás:

Az összes esetek száma:

$$6 \cdot 6 = 36.$$

A kedvező esetek: $1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1$, tehát 6 darab kedvező eset van. A valószínűség a kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosa.

Legyen A az alábbi esemény:

$$A = \{a\ dobott\ számok\ \text{összege}\ 7\}.$$

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

29. feladat: Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata legfeljebb 4?

Megoldás:

Az összes esetek száma:

$$6 \cdot 6 = 36.$$

A kedvező esetek: $1 \cdot 1;\ 1 \cdot 2;\ 1 \cdot 3;\ 2 \cdot 1;\ 3 \cdot 1;\ 2 \cdot 2$, tehát 6 darab kedvező eset van. A valószínűség a kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosa.

Legyen A az alábbi esemény:

$$A = \{a\ dobott\ számok\ szorzata\ legfeljebb\ 4\}.$$

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

30. feladat: Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számokat egymás mellé írva négyzetszámot kapunk eredményül?

Megoldás:

Az összes esetek száma:

$$6 \cdot 6 = 36.$$

A kedvező esetek: $16, 25, 36, 64$, tehát 4 darab kedvező eset van. A valószínűség a kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosa.

Legyen A az alábbi esemény:

$$A = \{a\ dobott\ számok\ négyzetszámot\ alkotnak\}.$$

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

31. feladat: Egy szabályos dobókockát hatszor feldobunk és a dobott számokat leírjuk egymás mellé. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott hatjegyű szám néggyel osztható?

Megoldás:

Az összes esetek száma:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6 = 46\,656.$$

A kedvező esetek azok, amikor az utolsó két számjegyből képzett szám osztható néggyel, az első négy számjegy pedig tetszőleges. Azok az esetek, amikor az utolsó két számjegy osztható néggyel: $12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64$, tehát 9 darab ilyen eset van. A kedvező esetek száma tehát

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 = 11\,664.$$

Legyen A az alábbi esemény:

$$A = \{a\ dobott\ számokat\ egymás\ mellé\ írva\ néggyel\ osztható\ számot\ kapunk\}.$$

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{11\,664}{46\,656} = \frac{1}{4}.$$

32. feladat: Egy dobozban 100 alkatrész van, amiből 10 selejt. Véletlenszerűen kiválasztunk 5 alkatrészt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 2 selejt?

Megoldás:

Az összes lehetőségek száma:

$$\binom{100}{5} = 75\,287\,520.$$

A kedvező estek száma:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{90}{3} = 45 \cdot 17\,480 = 5\,286\,600.$$

Legyen A az alábbi esemény:

$$A = \{a\ kiválasztott\ alkatrészek\ közül\ pontosan\ 2\ selejt\}.$$

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{5\,286\,600}{75\,287\,520} \approx 0{,}07.$$

33. feladat: Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötöslottón három találatunk lesz?

<u>Megoldás:</u>

Az összes lehetőségek száma:

$$\binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

A kedvező estek száma:

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} = 10 \cdot 3\,570 = 35\,700.$$

Legyen A az alábbi esemény:

$$A = \{az\ ötöslottón\ 3\ találatunk\ lesz\}.$$

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{35\,700}{43\,949\,268} \approx 0{,}00081.$$

34. feladat: Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötöslottón négy találatunk lesz?

<u>Megoldás:</u>

Az összes lehetőségek száma:

$$\binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

A kedvező estek száma:

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1} = 5\cdot 81 = 405.$$

Legyen A az alábbi esemény:

$$A = \{az\ \text{ötöslottón}\ 4\ találatunk\ lesz\}.$$

A keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{405}{43\,949\,268} \approx 9{,}6\cdot 10^{-6}.$$

35. feladat: Egy szerencsejáték a következőképpen zajlik: A játékos befizet 7 forintot, ezután a játékvezető feldob egy szabályos dobókockát. A dobás eredményének ismeretében a játékos abbahagyhatja a játékot. Ebben az esetben annyi forintot kap, amennyi a dobott szám értéke. Dönthet azonban úgy is, hogy nem kéri a dobott számnak megfelelő pénzt, hanem újabb 7 forintért újabb dobást kér. A játékvezető ebben az esetben ismét feldob egy szabályos dobókockát. A két dobás eredményének ismeretében a játékvezető annyi forintot fizet a játékosnak, amennyi a két dobás eredményének szorzata. Ezzel a játék véget ér. Bettina úgy dönt, hogy ha háromnál kisebb az első dobás eredménye, akkor abbahagyja a játékot, különben folytatja.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Bettina tovább játszik?

b) Bettina játéknak megkezdése előtt adjuk meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy a játékvezető pontosan 12 forintot fog fizetni neki?

c) Csaba mindenképpen egy két dobássorozatból álló játékot játszik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nyerni fog (azaz a kapott pénz és befizetett összeg különbsége pozitív)?

Megoldás:

a) Bettina abban az esetben játszik tovább, ha a dobás eredménye: $3{,}4{,}5{,}6$. Tehát a kedvező esetek száma: 4. Az összes esetek száma: 6. Legyen

$$\mathrm{A} = \{\text{Bettina tovább játszik}\}.$$

Ekkor $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) Két játszmát játszva az összes lehetőségek száma: 36. A kedvező esetek: $(3;4)$; $(4;3)$; $(6;2)$. Tehát a kedvező esetek száma: 3. Legyen

$$\mathrm{B} = \{\text{a fizetett pénz 12 forint}\}.$$

Tehát a B esemény valószínűsége:

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

c) Az összes esetek száma: 36. A kedvező estek: $(3; 5)$; $(3; 6)$; $(4; 4)$; $(4; 5)$; $(4; 6)$; $(5; 3)$; $(5; 4)$; $(5; 5)$; $(5; 6)$; $(6; 3)$; $(6; 4)$; $(6; 5)$; $(6; 6)$.

Tehát a kedvező esetek száma: 13.

Legyen a C esemény:

$$C = \{\text{Csaba nyer}\}.$$

A C esemény valószínűsége:

$$P(C) = \frac{13}{36}.$$

Gyakorló feladatok

1. feladat: Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata legfeljebb 5?

2. feladat: Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 1 írás van?

3. feladat: Egy dobozban 100 alkatrész van, amelyből 10 selejt. Öt alkatrészt (visszatevés nélkül) kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 selejt?

12 SOROZATOK

Elméleti összefoglaló:

A sorozatok első tagját a_1-gyel, n-edik tagját a_n-nel jelöljük. A számtani sorozat differenciája (különbsége): d, a mértani sorozat kvóciense (hányadosa): q.

	n-edik tag	első n tag összege
Számtani sorozat	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Mértani sorozat	$S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$	$S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

1. feladat: Egy útépítő vállalkozás az első napon 200 méter utat aszfaltoz le. Ezt követően a munkások számának növelésével minden nap 10 méterrel többet aszfaltoznak le, mint az előző napon. Az összes aszfaltozandó út hossza 10 km.

a) Hány méter utat aszfaltoztak le a 10-edik napon?

b) Hányadik munkanapon aszfaltoztak le 280 méter utat?

c) Hányadik munkanapon készülnek el a 10 km-es szakasz aszfaltozásával?

d) A 20-adik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e, hogy a naponta leaszfaltozott út hossza egyenesen arányos a munkások számával?

Megoldás:

Mivel minden nap ugyanannyival növekedett az aszfaltozott út hossza, ezért számtani sorozatról van szó.

a) Mivel $a_1 = 200$ és $d = 10$, ezért

$$a_{10} = a_1 + 9d = 200 + 9 \cdot 10 = 290,$$

tehát a 10-edik napon 290 méter utat aszfaltoztak le,

b) Legyen $a_n = 280$. Keressük az n értékét. Mivel

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

ezért

$$280 = 200 + (n-1) \cdot 10,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$80 = 10n - 10,$$

így $n = 9$ adódik, ami azt jelenti, hogy a 9-edik napon aszfaltoznak le 280 méter utat.

c) Mivel $S_n = 10\,000$ és

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n,$$

ezért a megoldandó egyenlet

$$10\,000 = \frac{400 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n.$$

A közös nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$20\,000 = (400 + (n-1) \cdot 10) \cdot n.$$

A zárójel felbontása után

$$20\,000 = 10n^2 + 390n$$

adódik. Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$10n^2 + 390n - 20\,000 = 0.$$

Mindkét oldalt 10-zel osztva az

$$n^2 + 39n - 2\,000 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk.

A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$n_{1,2} = \frac{-39 \pm \sqrt{39^2 - 4 \cdot (-2\,000)}}{2} = \frac{-39 \pm 97{,}58}{2}.$$

Tehát $n_1 = \frac{-39-97{,}58}{2} = -68{,}29$, illetve $n_2 = \frac{-39+97{,}58}{2} = 29{,}29$. Mivel $n > 0$, ezért azt kaptuk, hogy a 30. munkanapon fejezik be a munkát.

d) Mivel

$$S_{29} = \frac{2 \cdot 200 + 28 \cdot 10}{2} \cdot 29 = \frac{400 + 280}{2} \cdot 29 = 9\,860,$$

ezért az utolsó napon

$$10\,000 - 9\,860 = 240$$

méter utat aszfaltoztak. Megjegyezzük, hogy helytelen eredményhez vezetne az a gondolatmenet, hogy az utolsó napon aszfaltozott út hossza a_{30}, hiszen az utolsó napot már nem dolgozták végig, amit az mutat, hogy a c) kérdésben az n értéke nem egész szám lett.

e) Mivel

$$a_{20} = a_1 + 19d = 200 + 19 \cdot 10 = 390,$$

ezért nem igaz az, hogy a munkások létszámának növekedése egyenes arányban nő az aszfaltozott út hosszával, ugyanis, ha igaz lenne, akkor kétszer annyi munkásnak kétszer annyi utat kellene aszfaltoznia, ami $2 \cdot 200 = 400$ méter lett volna.

2. feladat: Egy számtani sorozat első három tagja rendre: $32;\ a;\ 18$.

a) Határozzuk meg a értékét!

b) Adjuk meg a sorozat differenciáját!

c) Tagja-e a sorozatnak a 2?

Megoldás:

a) Mivel a sorozat számtani, ezért bármely tagja a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepe, így

$$a = \frac{32 + 18}{2} = 25.$$

Tehát a sorozat második tagja: 25.

b) A sorozat differenciája:

$$d = 25 - 32 = -7.$$

c) Legyen $a_n = 2$. Mivel

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

ezért

$$2 = 32 + (n-1) \cdot (-7).$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$2 = 32 - 7n + 7,$$

tehát

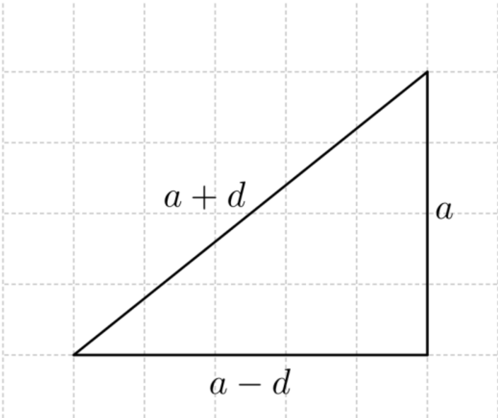
$$2 = -7n + 39,$$

amiből $n = \frac{37}{7}$ adódik. Mivel n nem természetes nem, ezért nem tagja a sorozatnak a 2.

3. feladat: Egy derékszögű háromszög oldalai 2 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Adjuk meg a háromszög oldalait! Számoljuk ki a háromszög területét!

Megoldás:

A háromszög befogói legyenek: $a - d$ és a. A háromszög átfogója legyen: $a + d$.



A Pitagorasz-tételt felírva azt kapjuk, hogy

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2.$$

Mivel $d = 2$, ezért

$$(a-2)^2 + a^2 = (a+2)^2$$

adódik. A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 4a + 4 + a^2 = a^2 + 4a + 4.$$

Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 8a = 0.$$

Kiemelve a-t

$$a \cdot (a - 8) = 0$$

adódik. Mivel $a \neq 0$, ezért $a = 8$. Tehát a háromszög oldalai: 6; 8 és 10 centiméter.

A háromszög területe:

$$T = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\ [cm^2].$$

4. feladat: Egy háromjegyű szám számjegyei egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Ha az egyesek és százasok helyén lévő számjegyeket felcseréljük, akkor az eredeti számnál 594-nél nagyobb számot kapunk. A szám értéke a számjegyei összegének 20-szorosánál 9-cel nagyobb. Határozzuk meg a háromjegyű számot!

Megoldás:

Legyen a keresett háromjegyű szám középső számjegye: a. A sorozat differenciája: d. Ekkor elkészíthetjük az alábbi táblázatot:

százas	tízes	egyes	szám értéke
$a-d$	a	$a+d$	$100 \cdot (a-d)$ $+ 10a + a + d$ $= 111a - 99d$

Ha felcseréljük a százasok és tízesek helyén lévő számjegyeket, akkor az alábbi táblázat írható fel:

százas	tízes	egyes	szám értéke
$a+d$	a	$a-d$	$100 \cdot (a+d)$ $+ 10a + a - d$ $= 111a + 99d$

Mivel a felcserélés után kapott számjegy 594-gyel nagyobb az eredetinél, ezért

$$111a + 99d = 111a - 99d + 594.$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$198d = 594,$$

így $d = 3$ adódik.

Mivel a szám értéke a számjegyei összegének 20-szorosánál 9-cel több, ezért

$$111a - 99d = 3a \cdot 20 + 9.$$

Tehát

$$51a = 99d + 9.$$

Mivel $d = 3$, ezért

$$51a = 99 \cdot 3 + 9 \Rightarrow a = 6.$$

Tehát a keresett szám: 369.

5. feladat: Egy sorozatot az alábbi képlettel definiálunk:

$$a_n = (n+2)^2 - n^2.$$

a) Igazoljuk, hogy a sorozat számtani sorozat!

b) Adjuk meg a sorozat első tagját és differenciáját!

Megoldás:

a) Mivel

$$a_n = (n+2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4,$$

ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$a_{n+1} - a_n = 4 \cdot (n+1) + 4 - (4n+4) = 4n + 4 + 4 - 4n - 4 = 4.$$

Tehát bármely két egymást követő sorozatelem különbsége azonos, ezért a sorozat számtani sorozat.

b) A sorozat első tagja:

$$a_1 = 4 \cdot 1 + 4 = 8,$$

a sorozat differenciája: $d = 4$.

6. feladat: Egy mértani sorozat második és harmadik tagjának összege 12, a harmadik és negyedik tag összege 24. Adjuk meg a sorozat első tagját és hányadosát!

Megoldás:

Mivel

$$a_2 = a_1 \cdot q;\ \ a_3 = a_1 \cdot q^2;\ \ a_4 = a_1 \cdot q^3,$$

ezért az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 12$$

$$a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 24.$$

Az első egyenletben kiemelünk $a_1 \cdot 1$-t, a második egyenletben kiemelünk $a_1 \cdot q^2$-et:

$$a_1 \cdot q \cdot (1+q) = 12$$

$$a_1 \cdot q^2 \cdot (1+q) = 24.$$

A második egyenletet elosztjuk az első egyenlettel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$q = 2.$$

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$a_1 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \Rightarrow a_1 = 2$$

adódik.

7. feladat: Egy mértani sorozat első tagja 2, hányadosa 3.

a) Tagja-e a sorozatnak az 1 458?

b) Adjuk meg a sorozat első négy tagjának összegét!

c) Hány darab egymást követő tagot kell ahhoz összeadnunk, hogy a tagok összege 2 186 legyen?

Megoldás:

a) Legyen $a_n = 1\,458$. Mivel

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

ezért

$$1\,458 = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Az egyenletet 2-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$729 = 3^{n-1}.$$

A 729 felírható 3 hatványaként, így

$$3^6 = 3^{n-1},$$

tehát $n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$. Tehát a sorozatnak tagja, mégpedig a hetedik tagja az 1 458.

b) Az első négy tag összege:

$$S_4 = a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 80.$$

c) Mivel

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

így

$$2\,186 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1},$$

tehát

$$2\,187 = 3^n.$$

Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\lg 2\,187 = \lg 3^n.$$

A logaritmus azonosságai szerint

$$\lg 2\,187 = n \cdot \lg 3$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$n = \frac{\lg 2\,187}{\lg 3} = 7.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az első 7 tag összege: 2 187.

8. feladat: Egy számtani sorozat első három tagjának összege 12. Ha az első taghoz 1-et, a második taghoz 2-t, a harmadik taghoz 6-ot adunk hozzá, akkor egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozzuk meg a számtani és mértani sorozat említett 3 tagját, adjuk meg a számtani sorozat differenciáját és a mértani sorozat hányadosát!

Megoldás:

A számtani sorozat első három tagját jelölje: $a - d; a; a + d$.

Ekkor

$$a - d + a + a + d = 12,$$

így $a = 4$. Elkészíthetjük az alábbi táblázatot:

	első tag	második tag	harmadik tag
számtani sorozat	$4-d$	4	$4+d$
mértani sorozat	$4-d+1=5-d$	6	$4+d+6=10+d$

A mértani sorozat esetén a középső tag a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe, így

$$6=\sqrt{(5-d)\cdot(10+d)}.$$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$$36=(5-d)\cdot(10+d).$$

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$36=50+5d-10d-d^2.$$

Az egyenletet nullára rendezve és az egynemű tagokat összevonva a

$$d^2+5d-14=0$$

másodfokú egyenlet adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$d_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+4\cdot 14}}{2}=\frac{-5\pm 9}{2}.$$

Tehát az egyenlet megoldása: $d_1=2$, illetve $d_2=-7$.

A számtani, illetve mértani sorozat első három tagja és azok differenciája, illetve hányadosa:

	1. tag	2. tag	3. tag	
1. számtani	2	4	6	$d=2$
1. mértani	3	6	12	$q=2$
2. számtani	11	4	-3	$d=-7$
2. mértani	12	6	3	$q=\frac{1}{2}$

9. feladat: Egy mértani sorozat első három tagjának összege 14.
Ha az első taghoz 1-et, a második taghoz 2-t, a harmadik taghoz 1-et adunk hozzá, akkor egy számtani sorozat három egymást követő tagját kapjuk.

Megoldás:

Legyen a mértani sorozat három tagja: $\frac{a}{q}; a; a \cdot q$.

Ekkor elkészíthető az alábbi táblázat:

	1. tag	2. tag	3. tag
mértani	$\frac{a}{q}$	a	$a \cdot q$
számtani	$\frac{a}{q} + 1$	$a + 2$	$a \cdot q + 1$

A mértani sorozat első három tagjának összege 14, így

$$\frac{a}{q} + a + a \cdot q = 14.$$

Az egyenletet q-val szorozva

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 = 14q$$

adódik.

Egy számtani sorozat bármely tagja egyenlő a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepével, így

$$a + 2 = \frac{\frac{a}{q} + 1 + a \cdot q + 1}{2},$$

így

$$2a + 4 = \frac{a}{q} + 2 + a \cdot q \Rightarrow \quad a \cdot q^2 - 2aq + a = 2q.$$

Tehát az alábbi egyenleteket kaptuk:

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 = 14q$$

$$a - 2aq + a \cdot q^2 = 2q.$$

Az első egyenletből és a második egyenletből is emeljünk ki a-t:

$$a \cdot (1 + q + q^2) = 14q$$

$$a \cdot (1 - 2q + q^2) = 2q.$$

Az első egyenletet a második egyenlettel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = 7.$$

A közös nevezővel szorozva

$$1 + q + q^2 = 7 - 14q + 7q^2$$

adódik. Az egyenletet nullára rendezve a $6q^2 - 15q + 6 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Az egyenlet mindkét oldalát osszuk el 3-al:

$$2q^2 - 5q + 2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

Tehát $q_1 = 2$, illetve $q_2 = \frac{1}{2}$.

Ha $q = 2$, akkor

$$a \cdot (2 + 4 + 8) = 28 \Rightarrow a = 2.$$

Ha $q = \frac{1}{2}$, akkor

$$a \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 7 \Rightarrow a \cdot \frac{7}{4} = 7 \Rightarrow a = 4.$$

Elkészíthetjük az alábbi táblázatot:

	első tag	második tag	harmadik tag	
mértani 1	2	4	8	$q = 2$
számtani 1	3	6	9	$d = 3$
mértani 2	8	4	2	$q = \frac{1}{2}$
számtani 2	9	6	3	$d = -3$

10. feladat: Adott négy szám: $2; a; 8; b$. Az első három szám egy számtani sorozat három egymást követő eleme, az utolsó három szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Határozzuk meg az a és a b számokat!

Megoldás:

Mivel az első három szám számtani sorozatot alkot, ezért

$$a = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Az utolsó három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja, így

$$8 = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{5 \cdot b}.$$

Gyakorló feladatok

1.feladat: Egy számtani sorozat első három tagjának összege: 12. A negyedik, ötödik és hatodik tag összege: 30. Adjuk meg a sorozat első tagját, differenciáját és az első 20 tag összegét.

2.feladat: Adjuk meg a kétjegyű pozitív páros számok összegét!

3.feladat: Egy mértani sorozat első eleme: 3, kvóciense: 1,5. Az első tagtól kezdve legalább hány egymást követő tagot adjunk össze ahhoz, hogy a tagok összege legalább 500 legyen?

13 ÉRETTSÉGI MINTAFELADATSOR

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2^{x^2-5x} = 1$$

egyenletet! (2 pont)

2. feladat: Két pozitív egész szám számtani közepe 5. A két szám közül a kisebbik szám 4. Mennyi a nagyobbik szám? Adjuk meg a két szám mértani közepét! (2 pont)

3. feladat: Tekintsük az alábbi adatsort:

$$1; 3; 4; 3; 3; 2; 3; 5; 4; 3; 2.$$

Adjuk meg az adatok átlagát, móduszát, terjedelmét, mediánját és szórását! (5 pont)

4. feladat: Ábrázoljuk az $f: [-5; 0] \to \mathbb{R}, f(x) = -2 \cdot |x+3| + 2$ függvényt. Adjuk meg a zérushelyét és értékkészletét! (3 pont)

5. feladat: Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ függvény értelmezhető! (2 pont)

6. feladat: Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 3 cm és 4 cm. Adjuk meg a háromszög szögeit és a háromszög átfogójához tartozó magasságának hosszát! (3 pont)

7. feladat: Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P(3; 4)$ pontra és párhuzamos az $x - 2y = 4$ egyenletű egyenesre! (2 pont)

8. feladat: Egy 40 fős társaságban 20-an kávéznak és 30-an teáznak. Hány olyan személy van, aki kávézik és teázik is? (2 pont)

9. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\frac{2+x}{x-3} \geq 0$$

egyenlőtlenséget! (3 pont)

10. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{2x-4} = 6$$

egyenletet! (2 pont)

11. feladat: Oldjuk meg az

$$(x+2)^2 - 2x = x + 6$$

egyenletet a valós számok halmazán! (2 pont)

12. feladat: Egy négyzet alapú hasáb térfogata $32\ dm^3$. A hasáb alapja $4\ cm$. Adjuk meg a hasáb magasságát! (2 pont)

13. feladat:

a) Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$1 - \sin x = 2\cos^2 x$$

egyenletet! (7 pont)

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\lg(x-1) - \lg x = 2$$

egyenletet! (5 pont)

14. feladat: Egy háromszög két oldalának hossza 5 cm és 6 cm. A háromszög területe: $T = 7{,}5\ cm^2$.

a) Adjuk meg a két oldal által bezárt szöget! (4 pont)

b) Adjuk meg a harmadik oldal hosszát! (4 pont)

c) Számoljuk ki a háromszög köré írt körének területét! (4 pont)

15. feladat: Egy szabályos dobókockát négyszer feldobunk és a kapott eredményeket egymás mellé írjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott szám

a) páros? (3 pont)

b) 4-gyel osztható? (3 pont)

c) 5-tel osztható? (3 pont)

d) számjegyeinek összege legfeljebb 22? (3 pont)

16. feladat: Egy 500 oldalas könyvet úgy szeretnénk elolvasni, hogy az első nap 20 oldalt, majd minden nap 5 oldallal többet szeretnénk olvasni.

a) Hány oldalt kell olvasunk a negyedik napon? (3 pont)

b) Hányadik nap fejezzük be a könyv elolvasását? (5 pont)

c) Hány oldal elolvasása marad az utolsó napra? (3 pont)

Egy másik, szintén 500 oldalas könyv elolvasását úgy tervezzük meg, hogy az első nap 20 oldalt szeretnénk olvasni, majd minden nap az előző napinál 20%-kal többet.

d) Hányadik nap fejezzük be a könyv elolvasását? (6 pont)

17. feladat: Tekintsük az $e: 2x + 4y = 6$ egyenest. Az f egyenes merőleges az e egyenesre és illeszkedik a $P(-2; 3)$ pontra.

a) Határozzuk meg az e egyenes meredekségét! (2 pont)

b) Adjuk meg az e egyenes irányszögét! (2 pont)

c) Ábrázoljuk az e egyenest! (2 pont)

d) Illeszkedik-e az e egyenesre a $(-3; 3)$ pont? Válaszunkat számolással igazoljuk! (3 pont)

e) Írjuk fel az f egyenes egyenletét! (3 pont)

f) Adjuk meg az e és az f egyenesek metszéspontját! Legyen a metszéspont Q. (3 pont)

g) Határozzuk meg a P és Q pontokat összekötő szakasz felezőpontját! (2 pont)

18. feladat: Egy téglatest egy csúcsából induló éleinek aránya: 1:2:3. A téglatest térfogata: $6\,000\ cm^3$.

a) Mekkorák a téglatest oldalai? (3 pont)

b) Mekkora a téglatest felszíne? (2 pont)

c) Adjuk meg a téglatest testátlójának hosszát! (2 pont)

d) Adjuk meg a téglatest kör írt gömbjének térfogatát! (5 pont)

e) Mekkora szöget zár be a testátló a legnagyobb területű oldallappal? (5 pont)

Megoldások:

1. feladat:

Felírjuk a jobb oldalt is 2 hatványaként. Mivel $1 = 2^0$, ezért

$$2^{x^2-5x} = 2^0.$$

Mivel az $x \to 2^x$ függvény szigorúan monoton (növekvő), ezért az

$$x^2 - 5x = 0$$

egyenlethez jutunk. Kiemelve x-et azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (x-5) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így

$x_1 = 0$, illetve $x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$.

Mivel ekvivalens állításokat végeztünk, ezért mindkét eredmény megoldása az eredeti egyenletnek.

2. feladat:

Az x és y számok számtani közepe:

$$A = \frac{x+y}{2}.$$

Mivel $x = 4$ és $A = 5$, ezért az

$$5 = \frac{4+y}{2}$$

egyenlethez jutunk, amiből a közös nevezővel szorozva $10 = 4 + y$ adódik, így $y = 6$.

Az x és y számok mértani közepe:

$$G = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} = 2 \cdot \sqrt{6}.$$

3. feladat:

Az adatokat nem-csökkenő sorba rendezve azt kapjuk, hogy

$$1;\ 2;\ 2;\ 3;\ 3;\ 3;\ 3;\ 3;\ 4;\ 4;\ 5.$$

Az átlag:

$$\frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5}{11} = \frac{33}{11} = 3.$$

A terjedelem:

$$5 - 1 = 4.$$

A medián: 3.

A szórásnégyzet:

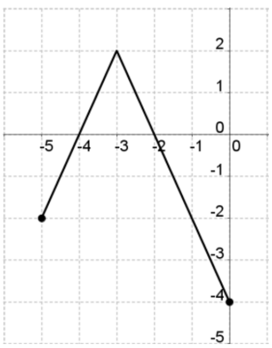
$$s^2 = \frac{(3-1)^2 + (3-2)^2 \cdot 2 + (3-3)^2 \cdot 5 + (3-4)^2 \cdot 2 + (3-5)^2}{11} = \frac{12}{11},$$

Tehát a szórás:

$$s = \sqrt{\frac{12}{11}} = 1{,}044.$$

4. feladat:

A függvény grafikonja:



A függvény zérushelyei: -2, illetve -4.

5. feladat:

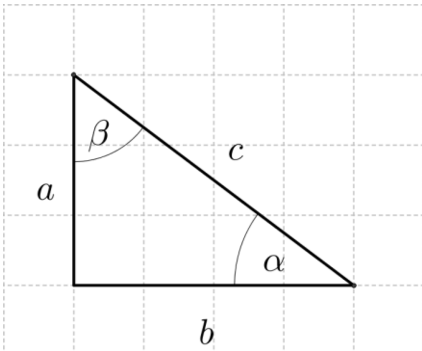
A négyzetgyök függvény értelmezési tartománya, hogy a gyök alatti mennyiség nem lehet negatív, tehát:

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 9 \geq x^2,$$

tehát $|x| \leq 3$, így $-3 \leq x \leq 3$.

6. feladat:

A háromszög befogói legyenek: a és b. Legyen $a = 3\ cm$ és $b = 4\ cm$.



A Pitagorasz-tétel szerint:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = c^2 \Rightarrow c = 5\ [cm].$$

Az átfogóhoz tartozó magasságot jelölje: m_c. A háromszög területe:

$$T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ [cm^2].$$

Másrészt a háromszög területe úgy is kiszámolható, hogy

$$T = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow 6 = \frac{5 \cdot m_c}{2} \Rightarrow 12 = 5m_c \Rightarrow m_c = 2{,}4\ [cm].$$

Az α szöget szinusz szögfüggvénnyel számoljuk:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36{,}87°.$$

A háromszög β szöge:

$$\beta = 90 - \alpha = 90 - 36{,}87° = 53{,}13°.$$

7. feladat:

Jelöljük a megadott egyenest e-vel, a keresett a egyenest f-fel. Ekkor az e egyenes egy normálvektora:

$$\overrightarrow{n_e} = (1; -2).$$

Párhuzamos egyenesek normálvektorai megegyeznek, így

$$\overrightarrow{n_f} = (1; -2).$$

A keresett egyenes egyenlete:

$$x - 2y = 3 - 8 \Rightarrow x - 2y = -5.$$

8. feladat:

Jelölje x azok számát, akik teáznak és kávéznak is. Ekkor, akik csak kávéznak, azok száma: $20 - x$, akik csak teáznak azok száma: $30 - x$. Tehát

$$(20 - x) + (30 - x) + x = 40 \Rightarrow 50 - x = 40 \Rightarrow x = 10,$$

így 10 olyan személy van, aki teázik és kávézik is.

9. feladat:

Egy tört úgy lehet pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű, azaz a számláló és a nevező is pozitív vagy a számláló és a nevező is negatív.

Első eset: $\frac{+}{+}$

$2 + x \geq 0$ és $x - 3 > 0$. Az első egyenlőtlenség megoldása: $x \geq -2$, a második egyenlőtlenség megoldása: $x > 3$. A két halmaz közös része: $x > 3$.

Második eset: $\frac{+}{+}$

$2 + x \leq 0$ és $x - 3 < 0$. Az első egyenlőtlenség megoldása: $x \leq -2$, a második egyenlőtlenség megoldása: $x < 3$. A két halmaz közös része: $x \leq -2$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$]-\infty; -2] \cup]3; \infty[.$$

10. feladat:

Az egyenlet értelmezési tartománya:

$$2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2.$$

A $\sqrt{2x-4} = 6$ egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$2x - 4 = 36 \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20.$$

Ellenőrzés: $\sqrt{2 \cdot 20 - 4} = \sqrt{36} = 6$, így $x = 20$ valóban megoldás.

11. feladat:

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 4x + 4 - 2x = x + 6.$$

Összevonás után

$$x^2 + x - 2 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Tehát $x_1 = 1$, illetve $x_2 = -2$. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmények megoldásai az eredeti egyenletnek.

12. feladat:

A hasáb térfogata:

$$V = a^2 \cdot m.$$

Jelen esetben $V = 32\ dm^3$ és $a = 0{,}4\ dm$. Tehát

$$32 = 0{,}16 \cdot m \Rightarrow m = \frac{32}{0{,}16} = 200\ [dm].$$

13. feladat:

a) Felhasználva, hogy

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

az egyenlet átírható az alábbi módon:

$$1-\sin x = 2\cdot(1-\sin^2 x).$$

Vezessük be az $a=\sin x$ jelölést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1-a=2\cdot(1-a^2).$$

A zárójelet felbontva, az egynemű tagokat összevonva és az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$2a^2-a-1=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával

$$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}$$

$a_1=1, illetve\ a_2=-\frac{1}{2}$ adódik.

Ha $a=1$, akkor

$$\sin x = 1,$$

amiből $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\ \ (\pi\in\mathbb{Z})$ adódik.

Ha $a=-\frac{1}{2}$, akkor

$$\sin x=-\frac{1}{2}.$$

Ha „visszakeressük'' az $\frac{1}{2}$ −et, akkor táblázati értéknek $\alpha=30°\rightarrow\frac{\pi}{6}$ adódik. A szinusz függvény a harmadik és negyedik síknegyedben negatív, így

$$x_2=\pi+\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\pi\ \ (l\in\mathbb{Z})$$

$$x_3=2\pi-\frac{\pi}{6}+m\cdot 2\pi\ \ (m\in\mathbb{Z}).$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a kapott eredményeket megoldásai az eredeti egyenletnek.

b) Az egyenlet értelmezési tartománya:

$$x-1>0\Rightarrow x>1\ és\ x>0.$$

Tehát az értelmezési tartomány: $x\in]1;\infty[$.

A logaritmus azonosságait felhasználva az egyenlet az alábbi alakra írható át:

$$\lg\frac{x-1}{x} = 2.$$

A jobb oldalt 10-as alapú logaritmusként írjuk fel:

$$\lg\frac{x-1}{x} = \lg 100.$$

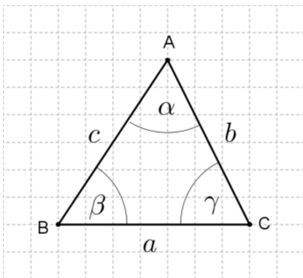
Az $x \to \lg x$ függvény szigorúan monoton (növekvő), így az

$$\frac{x-1}{x} = 100$$

egyenlethez jutunk. A közös nevezővel szorozva

$$x - 1 = 100x$$

adódik. Tehát: $x = -\frac{1}{99}$, ami nem eleme az egyenlet értelmezési tartományának, így az egyenletnek nincs megoldása.



14. feladat:

Legyen $a = 5\ cm, b = 6\ cm$. A háromszög területe: $T_\Delta = 7{,}5\ cm^2$.

a) A trigonometrikus területképlet szerint:

$$T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$7{,}5 = \frac{5 \cdot 6 \cdot \sin\gamma}{2} \Rightarrow 15 = 30\sin\gamma \Rightarrow \sin\gamma = \frac{1}{2}.$$

Ebből $\gamma_1 = 30°$, illetve $\gamma_2 = 150°$ adódik.

b) A koszinusztétel szerint:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Ha $\gamma = 30°$, akkor

$$c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 30°.$$

Tehát:

$$c^2 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos 30° = 9{,}04,$$

így $c_1 = 3{,}01\ cm$.

Ha $\gamma = 150°$, akkor

$$c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 150°.$$

Tehát:

$$c^2 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos 150° = 112{,}96,$$

így $c_2 = 10{,}63\ cm$.

c) A háromszög területe kiszámolható a

$$T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

képlettel, ahol R a háromszög köré írt körének sugara.

Ha $c = 3{,}01$, akkor

$$7{,}5 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 3{,}01}{4R} \Rightarrow 30R = 90{,}3 \Rightarrow R = 3{,}01\ [cm],$$

így a háromszög köré írt körének területe $T_O = R^2 \cdot \pi = 3{,}01^2 \cdot \pi = 28{,}46\ [cm^2]$.

Ha $c = 10{,}63$, akkor

$$7{,}5 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 10{,}63}{4R} \Rightarrow 30R = 318{,}9 \Rightarrow R = 10{,}63\ [cm],$$

így a háromszög köré írt körének területe $T_O = R^2 \cdot \pi = 10{,}63^2 \cdot \pi = 355\ [cm^2]$.

15. feladat:

a) Legyen az A esemény:

$$A = \{a\ négyjegyű\ szám\ páros\}.$$

Az összes eset: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$. Egy szám akkor páros, ha az utolsó számjegye páros, így a kedvező eset: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3$.Tehát az A esemény valószínűsége:

$$P(A) = \frac{6^3 \cdot 3}{6^4} = \frac{1}{2}.$$

b) Legyen a B esemény:

$$B = \{a\ négyjegyű\ szám\ osztható\ 4 - gyel\}.$$

Az összes eset: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$. Egy szám akkor osztható néggyel, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám osztható néggyel. Tehát az utolsó két számjegy lehet: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64. Tehát a kedvező eset: $6 \cdot 6 \cdot 9$, így a B esemény valószínűsége:

$$P(B) = \frac{6^2 \cdot 9}{6^4} = \frac{1}{4}.$$

c) Legyen a C esemény:

$$C = \{a\ négyjegyű\ szám\ osztható\ 5 - tel\}.$$

Az összes eset: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$. Egy szám akkor osztható öttel, ha az utolsó számjegye osztható öttel. Tehát az utolsó számjegy csak 5 lehet, így a kedvező eset: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1$, így a C esemény valószínűsége:

$$P(C) = \frac{6^3 \cdot 1}{6^4} = \frac{1}{6}.$$

d) Legyen a D esemény:

$$D = \{a\ dobott\ számok\ összege\ legfeljebb\ 23\}.$$

Az összes eset: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$. Mivel

$$\overline{D} = \{a\ dobott\ számok\ összege\ 23\ vagy\ 24\}$$

így a

$$\overline{D} = \{6665, 6656, 6566, 5666, 6666\}$$

esemény valószínűsége:

$$P(\overline{D}) = \frac{5}{6^4} = \frac{5}{6^4}.$$

Tehát $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{5}{6^4} = \frac{1\,291}{1\,296} = 0{,}9961$.

16. feladat:

a) Mivel minden nap ugyanannyival olvasunk többet, ezért egy számtani sorozatról van szó. A számtani sorozat első eleme: $a_1 = 20$, a sorozat differenciája: $d = 5$.

A negyedik napon: $a_4 = a_1 + 3d = 20 + 3 \cdot 5 = 35$ oldalt kell elolvasnunk.

b) A számtani sorozat első n tagjának összege 500, azaz $S_n = 500$. Keressük az n értékét. Mivel

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n,$$

ezért az adatok behelyettesítése után az

$$500 = \frac{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot 5}{2} \cdot n$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel szorozva és a zárójelet felbontva:

$$1\,000 = (40 + 5n - 5) \cdot n$$

adódik. A zárójelet felbontva, az egynemű tagot összevonva és az egyenletet nullára rendezve az alábbi másodfokú egyenlethez jutunk:

$$5n^2 + 35n - 1\,000 = 0.$$

Az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk 5-tel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$n^2 + 7n - 200 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 800}}{2} = \frac{-7 \pm 29{,}14}{2}.$$

Tehát az egyenlet megoldása: $n_1 = 11{,}07$, illetve $n_2 = -18{,}07$. Mivel $n > 0$, ezért azt kaptuk, hogy a könyv elolvasását a 12. napon fejezzük be.

c) A 11-edik napig összesen

$$S_{11} = \frac{2 \cdot 20 + 10 \cdot 5}{2} \cdot 11 = 45 \cdot 11 = 495$$

oldalt olvasunk el, így az utolsó napra $500 - 495 = 5$ oldal marad.

d) Mértani sorozatról van szó, amelyben $a_1 = 20$, továbbá $p = 20\%$, így $q = 1{,}2$. A sorozat első n tagjának összege:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Az adatokat behelyettesítve

$$500 = 20 \cdot \frac{1{,}2^n - 1}{1{,}2 - 1}$$

adódik. Mindkét oldalt 20-szal osztva azt kapjuk, hogy

$$25 = \frac{1{,}2^n - 1}{0{,}2} \Rightarrow 5 = 1{,}2^n - 1 \Rightarrow 6 = 1{,}2^n.$$

A $6 = 1{,}2^n$ egyenlet mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát véve azt kapjuk, hogy

$$\lg 6 = \lg 1{,}2^n \Rightarrow \lg 6 = n \cdot \lg 1{,}2.$$

Tehát

$$n = \frac{\lg 6}{\lg 1{,}2} = 9{,}83,$$

így a 10-edik napon fejezzük be a könyv elolvasását.

17. feladat:

a) Az e egyenes egyenletét átalakítva azt kapjuk, hogy

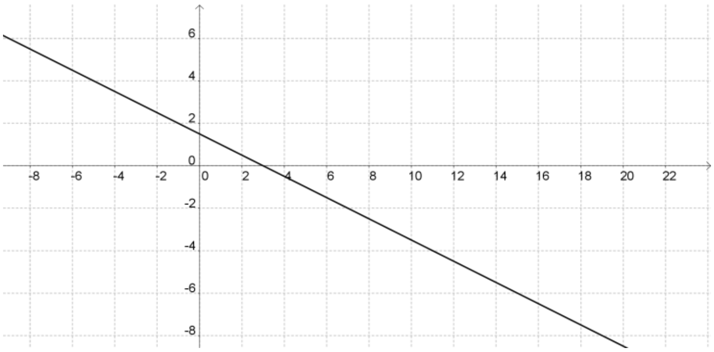
$$2x + 4y = 6 \Rightarrow 4y = 6 - 2x \Rightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x,$$

amiből az e egyenes meredeksége: $m_e = -\frac{1}{2}$.

b) Az egyenes irányszöge:

$$m_e = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \ \alpha = 153{,}43°.$$

c) Az egyenes ábrázolása:



d) Mivel

$$2 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 = 6,$$

ezért az egyenes egyenletébe behelyettesítve a $(-3; 3)$ pont koordinátáit igaz egyenlőséget kaptunk, így a pont illeszkedik az egyenesre.

e) Az e egyenes normálvektora: $\overrightarrow{n_e} = (2; 4)$. Az f egyenes merőleges az e egyenesre, így az f egyenes egy normálvektora: $\overrightarrow{n_f} = (-4; 2)$. Az f egyenesre illeszkedik a $P(-2; 3)$ pont, így az f egyenes egyenlete:

$$-4x + 2y = 8 + 6 \Rightarrow \ -2x + y = 7.$$

f) A metszéspontot az e és f egyenesek egyenleteiből képzett egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned} -2x + y &= 7 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}\right\}.$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $5y = 13 \Rightarrow y = 2{,}6$. A kapott eredményt behelyettesítve az első egyenletbe $-2x + 2{,}6 = 7 \Rightarrow x = -2{,}2$. Tehát a metszéspont:

$$Q(-2{,}2;\ 2{,}6).$$

g) A P és Q pontokat összekötő szakasz felezőpontja:

$$F_{PQ} = \left(\frac{-2 - 2{,}2}{2}; \frac{3 + 2{,}6}{2}\right) = (-2{,}1; 2{,}8).$$

18. feladat:

a) Legyenek a téglatest oldalai a, b és c. Legyen $a = x, b = 2x, c = 3x$. Ekkor

$$V = a \cdot b \cdot c = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3.$$

Mivel a téglatest térfogata 6 000 cm^3, így

$$6\,000 = 6x^3 \Rightarrow x^3 = 1\,000 \Rightarrow x = 10.$$

Tehát a téglatest oldalainak hossza:

$$a = 10\ cm; \quad b = 20\ cm; \quad c = 30\ cm.$$

b) A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (10 \cdot 20 + 10 \cdot 30 + 20 \cdot 30) = 2\,200\ [cm^3].$$

c) A testátló hossza:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{10^2 + 20^2 + 30^2} = \sqrt{1\,400} = 37{,}42\ [cm].$$

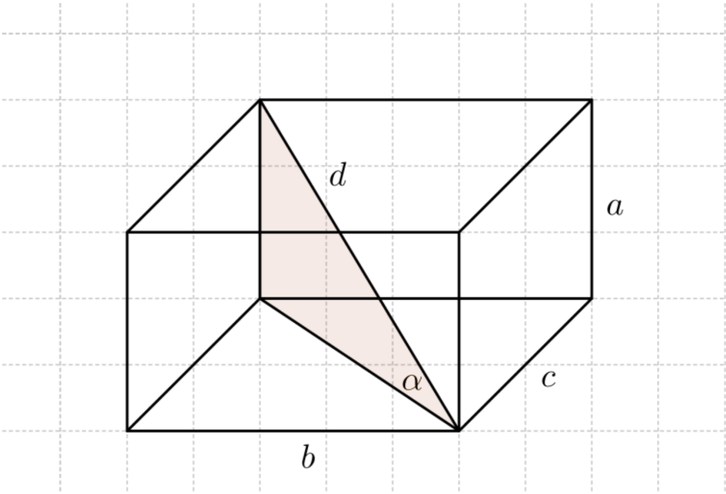
d) A téglatest köré írt köre gömbjének sugara a téglatest testátlójának fele:

$$R = \frac{d}{2} = 18{,}71\ [cm].$$

A gömb térfogata:

$$V = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = \frac{4 \cdot 18{,}71^3 \cdot \pi}{3} = 27\,435\ [cm^3].$$

e) A téglatest legnagyobb területű oldallapja a b és c oldalak által meghatározott oldallap



Az α szög nagyságát az alábbi módon kaphatjuk meg:

$$\sin\alpha = \frac{a}{d} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{10}{37{,}42} \Rightarrow \alpha = 15{,}5°.$$

FELHASZNÁLT SZAKIRODALOM

BALLA Éva, HERENDINÉ KÓNYA Eszter, PAULOVITS György: *A középiskolai matematikatanítás elméleti és gyakorlati kérdései*. Debrecen: Debreceni Egyetemi Kiadó, 2015. ISBN 978 963 473 843 5.

BARTHA Gábor, BOGDÁN Zoltán, CSÚRI József, DURÓ Lajosné, GYAPJAS Ferencné, KÁNTOR Sándorné, PINTÉR Lajosné: *Matematika feladatgyűjtemény I a középiskolák tanulói számára.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 1987. ISBN 978-963-19-4813-4.

BARTHA Gábor, BOGDÁN Zoltán, DURÓ Lajosné, GYAPJAS Ferencné, HACK Frigyes, KÁNTOR Sándorné, KORÁNYI Erzsébet: *Matematika feladatgyűjtemény I a középiskolák tanulói számára.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 1989. ISBN 963-18-1941-8.

GERŐCS László, JUHÁSZ István, OROSZ Gyula, PARÓCZAY József, SZÁMADÓ László, SZÁSZNÉ SIMON Judit: *Matematika emelt szintű tananyag.* ISBN 978 963 19 6107 2.

HORVAY Katalin, REIMAN István: *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* Budapest: Tankönyvkiadó, 1989. ISBN 963 18 2421 7.

KÉZI Csaba Gábor: *Bevezetés a magasabb szintű matematikába és alkalmazásaiba.* Debrecen: Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017. ISBN 978 963 318 172 0 .

KÉZI Csaba Gábor: *Bevezetés a magasabb szintű matematikába és alkalmazásaiba feladatgyűjtemény.* Debrecen: Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017. ISBN 978 963 318 096 9.

SOÓS Paula, CZAPÁRY Endre: *Geometriai feladatok gyűjteménye II.* Budapest: Tankönyvkiadó, 1981. ISBN 963 17 5512 6.

Matematika érettségi feladatok.
https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok (letöltés dátuma: 2018.06.10.)

SZÍKI Gusztáv Áron, NAGYNÉ KONDOR Rita, KÉZI Csaba Gábor: *Matematikai eszközök mérnöki alkalmazásokban.* Debrecen: Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017. ISBN 978 963 318 619 0