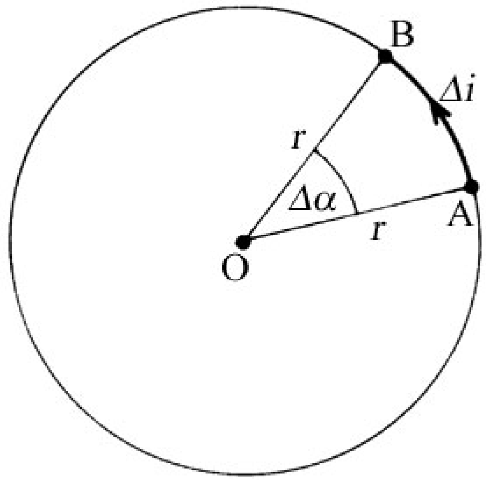
Debreceni Egyetem
Műszaki Kar

Vámosi Attila

Középiskolai fizika felkészítő

Körmozgások

Ha egy test mozgásának pályája kör, **körmozgás**ról beszélünk.



Egy körmozgást végző test a pályáján haladva az A pontból a B pontba jut, ezalatt végig halad az AB íven. Azt a körívet, amelyen a test végig halad, **befutott ív**nek nevezzük. A befutott ív hosszát *i*-vel vagy *Δ*i-vel jelöljük.

A körpálya centrumából a körmozgást végző testhez húzott sugár a **vezérsugár**. Ahogy a test mozog a körön, a vezérsugár elfordul.
Az elfordulás szögét jelöljük α-val vagy Δα-val.

Az ívhossz (Δi), a sugár (r) és a középponti szög (Δα) közötti összefüggés: $\Delta i = r \cdot \Delta\alpha$

A középponti szöget itt **radián**ban értjük. Egységnyi sugarú körben 1 radián annak a szögnek az ívmértéke, amelyhez éppen 1 hosszegységnyi körív tartozik.

$$1\ [\text{rad}] = \frac{180}{\pi}\ [°] \approx 57{,}296[°] \qquad 1\ [°] = \frac{\pi}{180}\ [\text{rad}] \approx 0{,}0175\ [\text{rad}]$$

Egy test **egyenletes körmozgás**t végez, ha mozgásának pályája kör,
és a test által befutott ív egyenesen arányos a befutás idejével.

A keringési idő vagy **periódusidő** az egy kör befutásához szükséges idő.
Jele: **T**, mértékegysége: $[s]$

A körmozgás periodikus mozgás, hiszen miután a test befutott egy kört általában újrakezdi.

A **fordulatszám** a körmozgást végző test által az időegység alatt befutott körök száma.
Jele: **n**, mértékegysége: $\left[\frac{1}{s}\right]$

Ha a fordulatszámot megszorozzuk az idővel, akkor megkapjuk, hogy az adott idő alatt hányszor futotta be a test ugyanazt a kört. A periódusidő alatt a test pontosan egy kört fut be, így a periódusidő és a fordulatszám szorzata 1.

$$n \cdot T = 1 \qquad \rightarrow \qquad n = \frac{1}{T} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{n}$$

A periódusidő és a fordulatszám egymás reciprokai.

Az egyenletes körmozgás definíciója szerint a test által befutott Δi ív és a befutásához szükséges Δt idő egyenesen arányos egymással, hányadosuk állandó.
Ezt az állandót a test **kerületi sebesség**ének nevezzük. (A kerületi sebesség érintő irányú.)

$$v_k = \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Az egyenletes körmozgást végző testhez a kör középpontjából húzott sugár (vezérsugár) szögelfordulásának és a szögelfordulás idejének hányadosát **szögsebesség**nek nevezzük.
Jele: **ω** (omega). Mértékegysége: $\left[\frac{1}{s}\right]$ $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

A szögsebesség és a kerületi sebesség közötti matematikai kapcsolat:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad \text{és} \quad \Delta i = r \cdot \Delta\alpha \quad \text{valamint} \quad v_k = \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{r}{r} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta i}{r \cdot \Delta t} = \frac{v_k}{r}$$

Feladat:

Egy H0-ás vasútmodell az 1,5 m sugarú körpályán 0,5 m/s állandó sebességgel mozog.

Kérdések:

a) Mekkora a periódusidő?

b) Mekkora a fordulatszáma?

c) Mekkora a szögsebesség?

a) kérdés megoldása:

$v_k = 0{,}5 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

$r = 1{,}5\ [m]$

A periódusidő egy teljes kör megtételéhez szükséges idő.
Egy teljes kör alatt befutott ív a kör kerületével egyenlő ($\Delta i = 2 \cdot r \cdot \pi$)

$$v_k = \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta i}{v_k} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot \pi}{0{,}5} = 18{,}85\ [s]$$

Tehát a periódusidő **18,85 [s]**.

b) kérdés megoldása:

A fordulatszám a periódusidő reciproka:

$$\mathrm{n} = \frac{1}{T} = \frac{1}{18{,}85} = \mathbf{0{,}053} \left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}\right]$$

c) kérdés megoldása:

A szögsebességet a kerületi sebesség és a sugár hányadosaként kapjuk:

$$\omega = \frac{v_k}{r} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s}\right]$$

Tehát a szögsebesség $\mathbf{0{,}\dot{3}}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}\right]$

Ellenőrzés képpen:

A szögsebesség a szögelfordulás és a közben eltelt idő hányadosa.
Egy teljes kör megtétele 360°, ami $2\pi[\mathrm{rad}]$, ennek megtételéhez a periódusidő szükséges (T=18,85[s])
Tehát:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\cdot\pi}{18{,}85} = 0{,}333\left[\frac{1}{s}\right]$$

Az egyenletes körmozgást végző test sebességének nagysága állandó, iránya pillanatról pillanatra változik, tehát van gyorsulása.

Mivel a sebesség nagysága állandó, ezért a gyorsulásnak nem lehet a sebességgel párhuzamos komponense, mert abban az esetben a sebesség nagysága is változna. Ha a test gyorsulásának nincs sebesség irányú komponense, akkor a gyorsulás merőleges a sebességre.

Ez a gyorsulás a kör középpontjába mutat. Ez utóbbi tulajdonsága miatt az egyenletes körmozgás gyorsulását **centripetális** gyorsulásnak nevezzük.

A centripetális gyorsulás nagysága a test kerületi sebességének négyzete és a körpálya sugarának hányadosa.

$$a_{cp} = \frac{v_k^2}{r}$$

Feladat:

Egy egyenletes körmozgást végző test út-idő és szögelfordulás-idő grafikonját látjuk az ábrán.

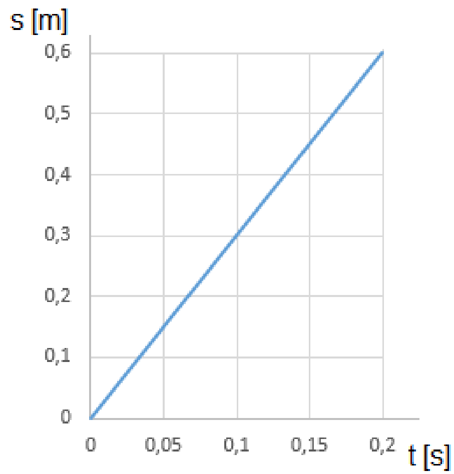
Kérdések:

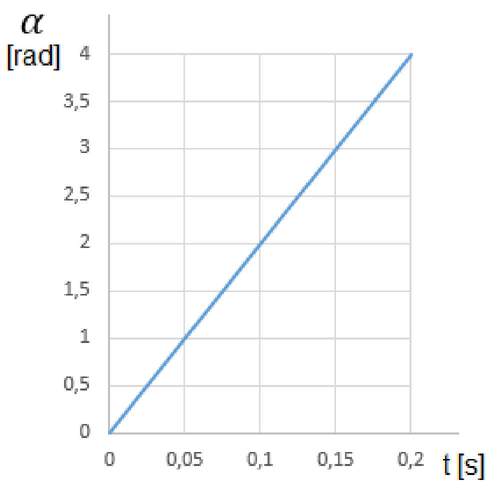
a) Mekkora a pálya sugara?

b) Mennyi a periódusidő?

c) Mekkora a fordulatszám?

d) Mekkora a test centripetális gyorsulás?





a) kérdés megoldása:

Az első ábráról leolvashatjuk az ívhosszakat és a hozzájuk tartozó időket.

0,1 [s] $\rightarrow$ 0,3 [m]
0,2 [s] $\rightarrow$ 0,6 [m]

Ezekből számítható a kerületi sebesség:

$$v_k = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{0{,}3}{0{,}1} = 3 \left[\frac{\mathrm{m}}{s}\right]$$

A második ábráról leolvashatjuk a szögelfordulásokat és a hozzájuk tartozó időket.

0,1 [s] $\rightarrow$ 2 [rad]
0,2 [s] $\rightarrow$ 4 [rad]

Ezekből számítható a szögsebesség:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2}{0{,}1} = 20 \left[\frac{1}{s}\right]$$

E kettőből pedig megkaphatjuk a sugarat:

$$\omega = \frac{v_k}{r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{v_k}{\omega} = \frac{3}{20} = \mathbf{0,15\ [m]}$$

b) kérdés megoldása:

A sugár és a kerületi sebesség ismeretében számítható a periódusidő:

$$v_k = \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{v_k} = \frac{2 \cdot 0{,}15 \cdot \pi}{3} = \mathbf{0{,}314}\ [\boldsymbol{s}]$$

c) kérdés megoldása:

A fordulatszám a periódusidő reciproka:

$$\mathrm{n} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}314} = \mathbf{3{,}185} \left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}\right]$$

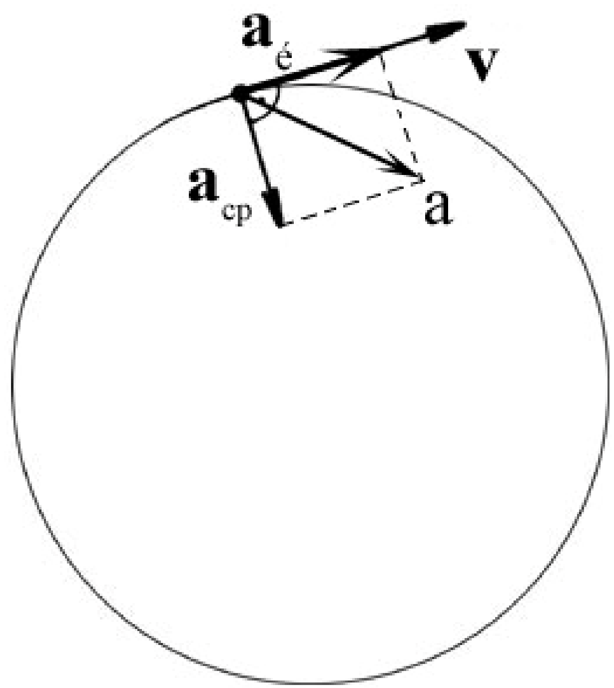
d) kérdés megoldása:

A centripetális gyorsulás a kerületi sebesség négyzetének és a sugárnak a hányadosa:

$$a_{cp} = \frac{v_k^2}{r} = \frac{3^2}{0{,}15} = \mathbf{60} \left[\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}\right]$$

Ha a körpályán mozgó test sebességének nem csak iránya, hanem nagysága is változik, akkor változó körmozgásról beszélünk. Ilyen esetben a test érintő irányban is gyorsul. Ha a körpályán mozgó test érintőirányú gyorsulásának nagysága állandó, **egyenletesen változó körmozgás**ról beszélünk.

A körmozgást végző test sebessége irányának a megváltozását a centripetális gyorsulás okozza. Nagyságát az $a_{cp} = \frac{v_k^2}{r}$ összefüggés segítségével határozhatjuk meg.



A körmozgást végző test sebessége nagyságának a megváltozását az érintő irányú gyorsulás okozza. Jele: $a_{é}$ és nagyságát külső körülmények határozzák meg.

Az eredő gyorsulás ennek a két gyorsulásnak a vektori összege. Nagysága:

$$a = \sqrt{a_{é}^2 + a_{cp}^2}$$

Az egyenletesen változó körmozgást végző test pillanatnyi sebessége:

$$v_k = v_0 \pm a_{\text{é}} \cdot t$$

(+ jelet használunk, ha a test gyorsul, és – jelet használunk, ha a test lassul.)

A kerületi sebesség változása miatt, a szögsebesség sem állandó. Mivel $v_k = r \cdot \omega$, így

$$r \cdot \omega = v_0 + a_{\text{é}} \cdot t$$

$$\omega = \frac{v_0}{r} + \frac{a_{\text{é}}}{r} \cdot t$$

$$\frac{v_0}{r} = \omega_0 \quad \text{és} \quad \text{legyen} \quad \frac{a_{\text{é}}}{r} = \beta, \text{ így}$$

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$$

melyből:

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

A $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ hányadost **szöggyorsulás**nak nevezzük,
mely mennyiség a szögsebesség változás és a közben eltelt idő hányadosa. Mértékegysége: $\left[\frac{1}{s^2}\right]$

Feladat:

Egy egyenletesen változó körmozgást végző test eredő gyorsulása egy kiválasztott pillanatban 5 m/s^2 és a gyorsulás iránya 60°-os szöget zár be az érintővel.

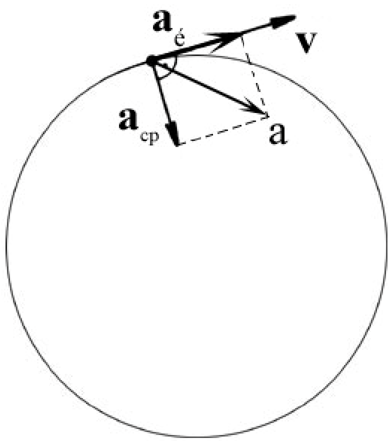
Kérdések:

a) Mekkorák a test érintőirányú és sugárirányú gyorsulásai?

b) Álló helyzetből indulva mennyi idő alatt és milyen hosszú út megtételével éri el a test a 15 m/s sebességet?

c) Mekkora a pálya sugara és mekkora a szögelfordulás mértéke, ha a 15 m/s sebességnél a centripetális gyorsulás 4,25 m/s^2?

a) kérdés megoldása:



$a_{eredő} = 5\left[\frac{\mathrm{m}}{s^2}\right]$ $\varphi = 60°$

A gyorsulások értékeit megkapjuk,
ha az eredő gyorsulás vektort komponenseire bontjuk.

$$a_{é} = a_{eredő} \cdot \cos\varphi = 5 \cdot \cos 60° = \mathbf{2,5}\left[\frac{\mathbf{m}}{\boldsymbol{s}^2}\right]$$

$$a_{cp} = a_{eredő} \cdot \sin\varphi = 5 \cdot \sin 60° = \mathbf{4,33}\left[\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}^2}\right]$$

Ellenőrzés:

$$a_{eredő} = \sqrt{a_{é}^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 4{,}33^2} = \sqrt{25} = 5\left[\frac{\mathrm{m}}{s^2}\right]$$

b) kérdés megoldása:

$v_0 = 0 \left[\frac{\text{m}}{s}\right]$ $v_k = 15 \left[\frac{\text{m}}{s}\right]$

Egyenletesen változó körmozgást végző test sebessége: $v_k = v_0 + a_é \cdot t$
ebből:

$$t = \frac{v_k - v_0}{a_é} = \frac{15 - 0}{2{,}5} = \mathbf{6\ [s]}$$

A mozgás során megtett út:

$$\Delta i = v_0 \cdot t + \frac{a_é}{2} \cdot t^2 = 0 \cdot 6 + \frac{2{,}5}{2} \cdot 6^2 = \mathbf{45\ [m]}$$

c) kérdés megoldása:

$v_k = 15\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad a_{cp} = 4{,}25\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$

A centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{v_k^2}{r}$$

ebből:

$$r = \frac{v_k^2}{a_{cp}} = \frac{15^2}{4{,}25} = \mathbf{52,94\ [m]}$$

$\Delta i = 45\ [\mathrm{m}] \quad és \quad \Delta i = r \cdot \Delta\alpha$

ebből:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta i}{r} = \frac{45}{52{,}94} = \mathbf{0,85\ [rad]} \approx \mathbf{48,7°}$$

Feladat:

Álló helyzetből, egy 30 cm sugarú körpályán, egyenletesen gyorsulva induló test 12 másodperc alatt éri el a 60 1/s szögsebességet.

Kérdések:

a) Mekkora a szöggyorsulása?

b) Mekkora ekkor a test kerületi sebessége?

a) kérdés megoldása:

$r = 30\ [\mathrm{cm}] = 0{,}3\ [\mathrm{m}]$ $\quad t = 12\ [s]$ $\quad \omega = 60\left[\frac{1}{s}\right]$

A szögsebesség:

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$$

ebből:

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{60 - 0}{12} = \mathbf{5}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}}\right]$$

b) kérdés megoldása:

A kerületi sebesség:

$$v_k = v_0 + a_é \cdot t$$

felhasználva, hogy: $a_é = \beta \cdot r$

$$v_k = v_0 + \beta \cdot r \cdot t = 0 + 5 \cdot 0{,}3 \cdot 12 = \mathbf{18}\left[\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right]$$

Feladat:
Egy 2 m sugarú körpályán állandó 1,5 m/s kerületi sebességgel mozog egy test.
Negyed körrel mögötte, álló helyzetből 0,5 m/s^2 érintő irányú gyorsulással elindul egy másik test.

Kérdések:
a) Mennyi idő múlva éri utól a második test az elsőt?
b) Megtesz-e az első test egy teljes kört az utólérésig?

a) kérdés megoldása:

$r = 2\ [\mathrm{m}]$ $v_1 = 1{,}5\left[\frac{m}{s}\right]$ $a_{é2} = 0{,}5\left[\frac{m}{s^2}\right]$ $\Delta\alpha = \frac{\pi}{2}[\mathrm{rad}]$

Az első test által megtett út:

$$\Delta i_1 = v_1 \cdot t$$

a második test által megtett út:

$$\Delta i_2 = \frac{a_{é2}}{2} \cdot t^2$$

a második testnek egy negyed körrel többet kell megtennie, ezért:

$$\Delta i_2 = \Delta i_1 + \frac{\pi}{2} \cdot r$$

$$\frac{a_{é2}}{2} \cdot t^2 = v_1 \cdot t + \frac{\pi}{2} \cdot r$$

$$\frac{0{,}5}{2} \cdot t^2 = 1{,}5 \cdot t + \frac{\pi}{2} \cdot 2$$

$$0 = 0{,}25 \cdot t^2 - 1{,}5 \cdot t - \pi$$

$$t = \frac{1{,}5 + \sqrt{1{,}5^2 + 4 \cdot 0{,}25 \cdot \pi}}{2 \cdot 0{,}25} = \mathbf{7{,}64\ [s]}$$

b) kérdés megoldása:

$r = 2\ [\mathrm{m}]$ $\quad v_1 = 1{,}5\left[\frac{m}{s}\right]$ $\quad a_{é2} = 0{,}5\left[\frac{m}{s^2}\right]$ $\quad \Delta\alpha = \frac{\pi}{2}[\mathrm{rad}]$

$\Delta t = 7{,}64\ [\mathrm{s}]$

Az első test szögsebessége:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{v_1}{r}$$

ezekből:

$$\Delta\alpha = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{r} = \frac{1{,}5 \cdot 7{,}64}{2} = 5{,}73\ [\mathrm{rad}] = 328{,}3° < 360°$$

Tehát az első test nem tesz meg egy teljes kört az utólérésig.

Feladat:

12 óra után hány perc múlva lesz az óra kis és nagy mutatója merőleges egymásra?

<u>megoldás:</u>

A nagymutató sebessége:

$$v_{nagy} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{K}{3600}$$

A kismutató sebessége:

$$v_{kis} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{K}{12 \cdot 3600}$$

A megtett út:

$$\Delta i = v_k \cdot \Delta t$$

Akkor lesznek merőlegesek, ha a nagymutató pontosan egy negyed körrel több utat tesz meg:

$$\Delta i_{nagy} = \Delta i_{kis} + \frac{K}{4}$$

$$v_{nagy} \cdot \Delta t = v_{kis} \cdot \Delta t + \frac{K}{4}$$

$$\frac{K}{3600} \cdot \Delta t = \frac{K}{12 \cdot 3600} \cdot \Delta t + \frac{K}{4}$$

$$\frac{\Delta t}{3600} = \frac{\Delta t}{12 \cdot 3600} + \frac{1}{4}$$

$$\Delta t = \frac{3 \cdot 3600}{11} = 981{,}81\ [s] = \mathbf{16,36\ [\boldsymbol{perc}]}$$

Köszönöm a figyelmet!