Debreceni Egyetem
Műszaki Kar

Vámosi Attila

Középiskolai fizika felkészítő

Szabadesés, vízszintes és ferde hajítás

Ha egy testre csak a Föld vonzóereje hat (az egyéb, mozgást akadályozó hatások elhanyagolhatók), akkor a test mozgását **szabadesés**nek nevezzük.

A szabadesés gyorsulása: **g**, értéke Magyarországon **g=9,81 [m/s²]**

Neve **nehézségi gyorsulás,** függőleges irányú és megközelítőleg a Föld középpontja felé mutat.

Feladat:

Egy 100 m magasan álló hőlégballonból kiejtünk egy homokzsákot.
(Kezdősebesség nincs, a légellenállástól eltekintünk.)

a) Mennyi idő múlva ér földet a homokzsák?
b) Mekkora lesz a sebessége a földetérés pillanatában?
c) Hogyan változnak a fenti értékek, ha a homokzsákot v_0=10 m/s kezdősebességgel dobjuk ki?

a) kérdés megoldása:

Magasság: $h = 100\ [\mathrm{m}]$

Kezdősebesség: $v_0 = 0\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

Nehézségi gyorsulás: $g = 9{,}81\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$

A függőlegesen lefelé hajított test mozgása speciális esete az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásnak.

A megtett út: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ itt speciálisan: $h = \frac{g}{2} \cdot t^2$

Képletből az időt kifejezve:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{9{,}81}} = \mathbf{4{,}52\ [s]}$$

Tehát a homokzsák a kiejtés után **4,52 [s]** múlva ér földet.

<u>b) kérdés megoldása:</u>

A függőlegesen lefelé hajított test mozgása speciális esete az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásnak.

A pillanatnyi sebesség értéke: $v = a \cdot t$ itt speciálisan: $v = g \cdot t$

azaz:

$$v = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 4{,}52 = \mathbf{44,34}\ \left[\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right] \approx 160 \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$$

Tehát a homokzsák **44,34 [m/s]** sebességgel csapódik a földbe.

c) kérdés megoldása:

Ha van kezdősebesség, akkor a két képlet az alábbiak szerint módosul:

A megtett út: $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ itt speciálisan: $h = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$

A pillanatnyi sebesség értéke: $v = v_0 + a \cdot t$ itt speciálisan: $v = v_0 + g \cdot t$

ezért:

$$100 = 10 \cdot t + \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 \text{ átrendezve: } 0 = \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t - 100$$

a másodfokú egyenlet megoldóképletét használva:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot \frac{9{,}81}{2} \cdot (-100)}}{2 \cdot \frac{9{,}81}{2}} \rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{t_1 = 3{,}61\ [\mathrm{s}]} \\ \cancel{t_2 = -5{,}65\ [s]} \end{matrix}$$

$$v = v_0 + g \cdot t = 10 + 9{,}81 \cdot 3{,}61 = \mathbf{45{,}41} \left[\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right] \approx 163 \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$$

A **függőlegesen felfelé hajított** test mozgása speciális esete a kezdősebességgel rendelkező, egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnak. Ebben az esetben a sebesség és gyorsulás vektorok ellentétes irányúak, a sebesség felfelé, a gyorsulás lefelé mutat.

A függőlegesen felfelé hajított test hely-idő függvénye:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

a sebesség-idő függvénye pedig:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

Feladat:

Dobjunk fel egy követ 30 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé.
(A légellenállástól eltekintünk.)

a) Mennyi idő múlva esik vissza a földre a kő?
b) Milyen maximális magasságot ér el a kő?
c) Mekkora lesz a sebessége a földetérés pillanatában?

megoldás:

Kezdősebesség: $v_0 = 30 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

Nehézségi gyorsulás: $g = 9{,}81 \left[\frac{\mathrm{m}}{s^2}\right]$

A pillanatnyi sebesség: $v = v_0 - g \cdot t$

A tetőpontban a sebesség 0 lesz, így $0 = v_0 - g \cdot t$ melyből $t = \frac{v_0}{g} = \frac{30}{9{,}81} = 3{,}06\ [s]$

A megtett út: $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ melyből a maximális magasság:

$$h_{max} = 30 \cdot 3{,}06 - \frac{9{,}81}{2} \cdot 3{,}06^2 = \mathbf{45{,}87\ [m]}$$

Szabadesésben 0 sebességről indulva ugyanennyi utat tesz meg lefelé,

$45{,}87 = 0 \cdot t + \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2$ ebből az idő:

$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 45{,}87}{9{,}81}} = 3{,}06\ [s]$, tehát 3,06 [s]-ig emelkedik majd ugyanennyi időt zuhan,

így **6,12 [s]** múlva ér földet.

Sebessége a földetérés pillanatában $v = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 3{,}06 = \mathbf{30} \left[\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right]$

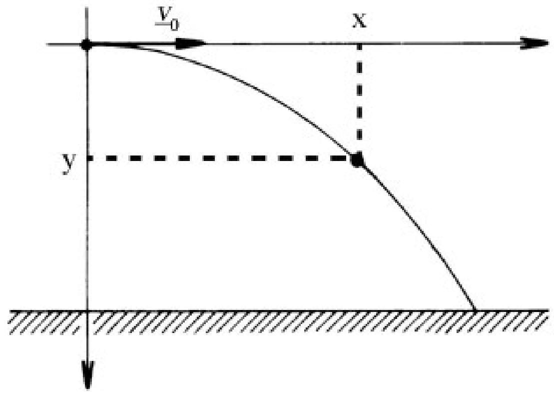
.

Vízszintes hajításról akkor beszélhetünk, amikor egy testet vízszintes irányú kezdősebességgel hajítunk el a gravitációs térben.

A vízszintesen elhajított test vízszintes irányú mozgása egy állandó sebességű mozgás, míg függőleges irányú mozgása szabadesés.

Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy kezdőpontja az elhajítás helye legyen, az x tengely mutasson a hajítás irányába, az y tengely pedig függőlegesen lefelé. A test kezdősebessége v_0 legyen! A koordináták megadják a test helyét:

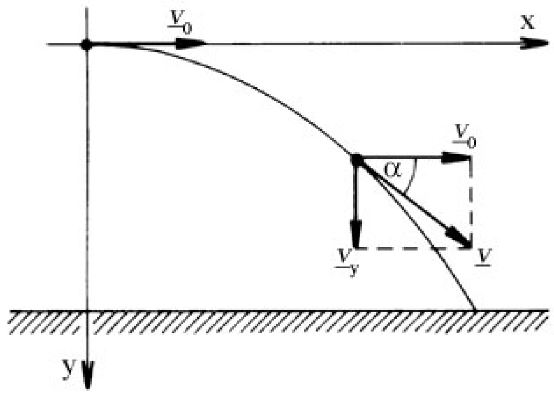
$$x = v_0 \cdot t \qquad y = \frac{g}{2} \cdot t^2$$



A pillanatnyi sebességet a két mozgás sebességének eredőjeként adjuk meg:

$$v_x = állandó = v_0 \qquad v_y = g \cdot t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

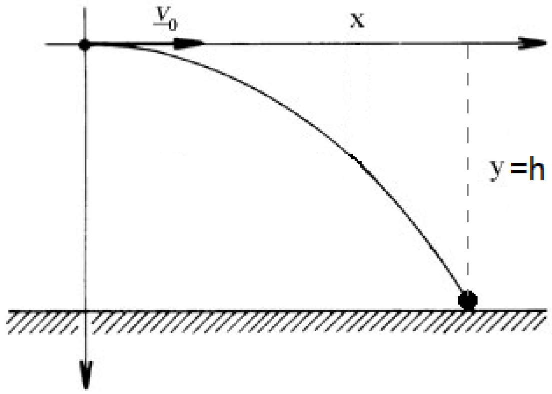


Feladat:

Egy 10 m magas ház tetejéről 20 m/s kezdősebességgel vízszintesen elrúgung egy labdát.
(A légellenállástól eltekintünk.)

a) Mennyi idő múlva ér földet a labda?
b) Milyen távol ér földet az épület falától?
c) Mekkora lesz a sebessége a földetérés pillanatában?

a) kérdés megoldása:



Magasság: $h = 10\ [\mathrm{m}]$

Kezdősebesség: $v_0 = 20\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

Nehézségi gyorsulás: $g = 9{,}81\ \left[\frac{\mathrm{m}}{s^2}\right]$

A földetérés helyének y koordinátája h lesz: $h = \frac{g}{2} \cdot t^2$

Ebből kifejezhetjük az időt: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9{,}81}} = \mathbf{1,43\ [s]}$

Tehát a labda **1,43 [s]** múlva ér földet.

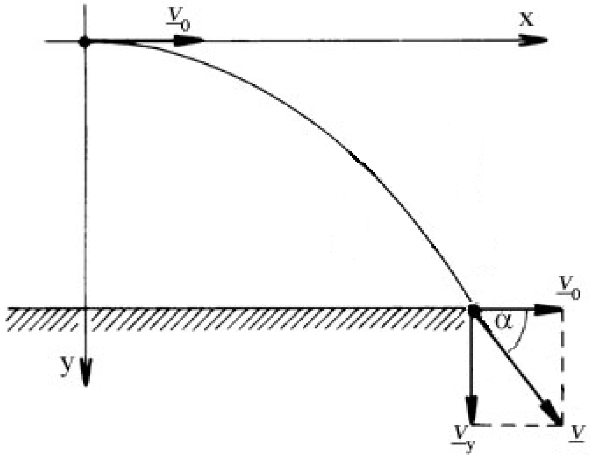
b) kérdés megoldása:

Mivel ugyanennyi ideig tart a vízszintes irányú mozgása is, így az x komponens is számítható:

$$x = v_0 \cdot t = 20 \cdot 1{,}43 = \mathbf{28,6\ [m]}$$

Tehát a labda a faltól **28,6 [m]** távolságra ér földet.

c) kérdés megoldása:



A földetérés pillanatában lévő sebességének kiszámításához meg kell határozni a sebességvektor vízszintes és függőleges komponensének nagyságát, majd azokból pedig a vektor hosszát:

vízszintes komponens:

$$v_x = v_0 = 20\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Függőleges komponens:

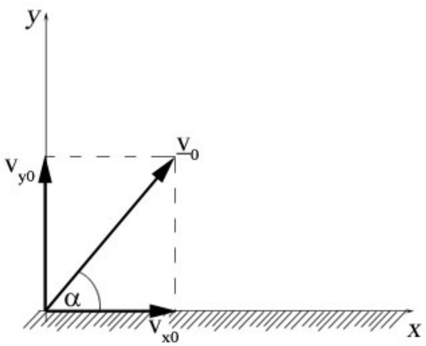
$$v_y = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 1{,}43 = 14{,}03\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

A sebességvektor nagysága:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{20^2 + 14{,}03^2} = \mathbf{24,43}\ \left[\frac{\mathbf{m}}{\boldsymbol{s}}\right]$$

Tehát a labda **24,43 [m/s]** nagyságú sebességgel ér földet.

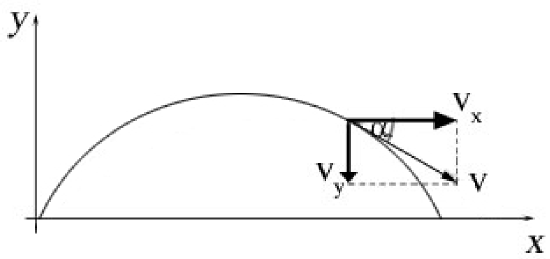
Ferde hajításról akkor beszélhetünk, amikor egy testet a vízszintessel 0-90° közötti szöget bezáró kezdősebességgel hajítunk el a gravitációs térben.



A kezdősebesség vektorát vízszintes és függőlegese komponensekre kell bontani:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$$

A ferdén elhajított test vízszintes irányú mozgása egy <u>állandó sebességű mozgás</u>, míg függőleges irányú mozgása <u>szabadesés</u>.



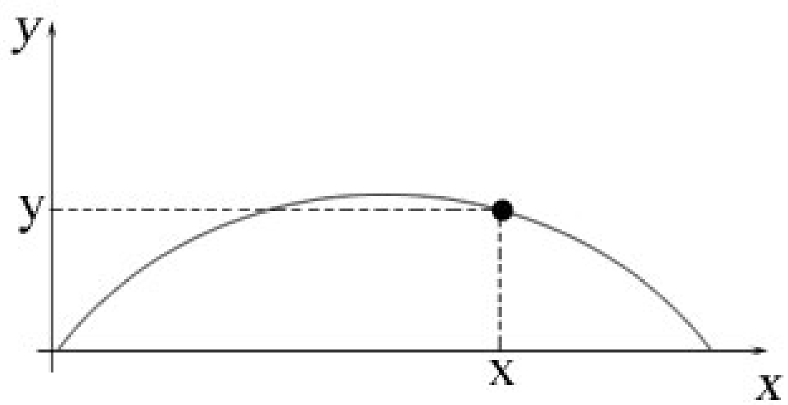
$$v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = állandó$$

$$v_y = v_{0y} \pm g \cdot t = v_0 \cdot \sin\alpha \pm g \cdot t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy kezdőpontja az elhajítás helye legyen, az x tengely mutasson a hajítás vízszintes komponensével egyező irányába, az y tengely pedig mutasson a hajítás függőleges komponensével egyező irányba.

A test kezdősebessége v_0 legyen!



A koordináták megadják a test helyét:

$$x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$\mathrm{y} = v_{0y} \cdot t \pm \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t \pm \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Feladat:

A kapus a földre helyezett labdát a vízszintessel 60°-ot bezáró szöggel, 20 m/s kezdősebességgel rúgja ki. (A légellenállástól eltekintünk.)

a) Mennyi idő múlva ér földet a labda?
b) Milyen maximális magasságot ér el a labda?
c) Milyen távol ér földet a labda a kezdőponttól?
d) Mekkora lesz a labda sebessége a földetérés pillanatában?

a) kérdés megoldása:

Vízszintessel bezárt szög: $\alpha = 60°$

Kezdősebesség: $v_0 = 20 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

Nehézségi gyorsulás: $g = 9{,}81 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$

A labda függőleges irányú sebessége a tetőpontban 0 lesz: $v_y = 0 = v_{0y} - g \cdot t$

Ebből kifejezhetjük az időt: $t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{9{,}81} = \frac{20 \cdot \sin 60°}{9{,}81} = 1{,}766\ [\mathrm{s}]$

Tehát a labda 1,766 [s]-ig emelkedik, majd ugyanennyi ideig zuhan, tehát **3,53 [s]** múlva ér földet.

b) kérdés megoldása:

Az elmozdulás függőleges irányú komponense:

$$s_y = v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

melyből a maximális magasság:

$$h_{max} = 20 \cdot \sin 60° \cdot 1{,}766 - \frac{9{,}81}{2} \cdot 1{,}766^2 = \mathbf{15,29\ [m]}$$

c) kérdés megoldása:

Vízszintessel bezárt szög: $\alpha = 60°$

Kezdősebesség: $v_0 = 20\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

Nehézségi gyorsulás: $g = 9{,}81\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$

Vízszintes irányban a labda egyenletes mozgást végez v_{0x} állandó sebességgel.

A labda vízszintes iránybeli elmozdulása:

$$s_x = v_{0x} \cdot 2t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot 2t = 20 \cdot \cos 60° \cdot 3{,}53 = \mathbf{35,3\ [m]}$$

d) kérdés megoldása:

Sebességének vízszintes irányú komponense: $v_x = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \cos 60° = 10\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

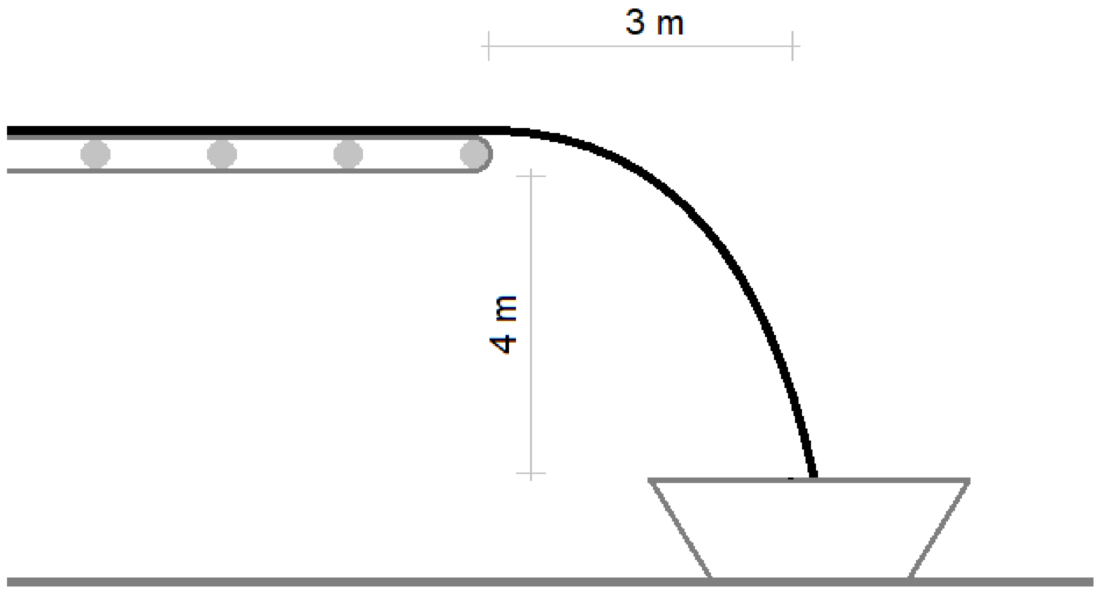
Sebességének függőleges irányú komponense: $v_y = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 1{,}766 = 17{,}32\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

(ami nem más, mint a kezdősebesség y irányú komponense: $v_0 \cdot \sin\alpha = 20 \cdot \sin 60° = 17{,}32\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$)

Tehát a sebesség eredőjének nagysága a kezdősebességgel megegyező **20 [m/s]** lesz, de a sebességvektor iránya különbözik, a vízszintessel -60°-ot zár be.

Feladat:

Egy vízszintes szállítószalagon érkező szén a szalag végétől vízszintesen 3 m, függőlegesen 4 m távolságra lévő konténerbe érkezik. Mekkora a szalag sebessége? (A légellenállástól eltekintünk.)



megoldás:

A szén függőlegesen gyorsulva mozog, 0 kezdősebességgel, ebből számítható az idő:

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{9{,}81}} = 0,9\ [\mathrm{s}]$$

Ezt felhasználva az elmozdulás vízszintes komponenséből számítható a sebesség:

$$s = v_0 \cdot t \quad \rightarrow v_0 = \frac{s}{t} = \frac{3}{0{,}9} = \mathbf{3,3}\ \left[\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right]$$

Hogyan változnának az értékek, ha a szén kétszer ekkora sebességgel érkezne?

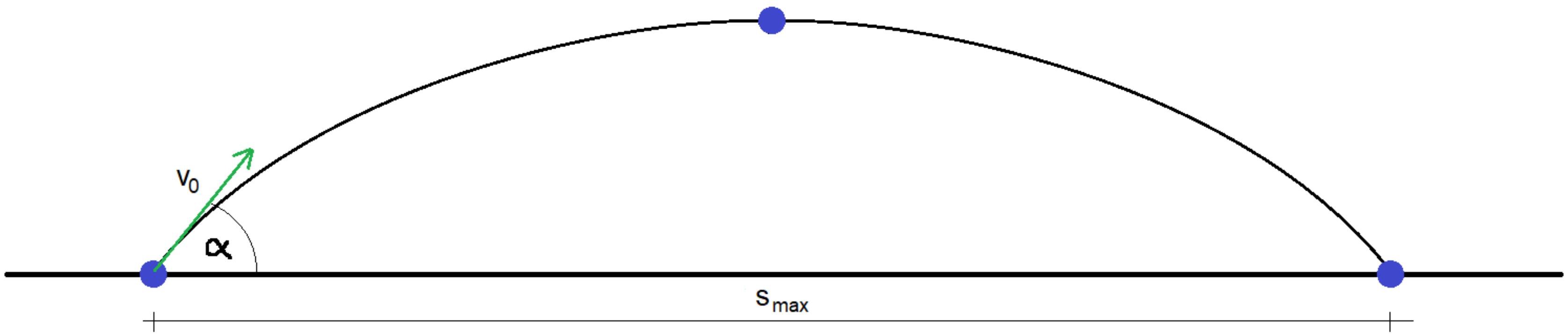
Az első képletből látszik, hogy ha a magasság nem változik, akkor mindegy milyen sebességgel érkezik a szén, mindig ugyanannyi idő alatt ér földet, tehát a kezdősebesség csak a vízszintes távolságot befolyásolja, egyenes arányban:

$$s = v_0 \cdot t = 2 \cdot 3{,}3 \cdot 0{,}9 \approx \mathbf{6}\ [\mathbf{m}]$$

Tehát minél gyorsabban érkezik a szén, annál távolabb ér földet, de ugyanannyi idő alatt.

Kérdés:

A vízszinteshez képest hány fokos szöggel kell eldobnunk egy testet, hogy az a lehető legtávolabb érjen földet? (A légellenállástól eltekintünk.)



<u>megoldás:</u>

Írjuk fel a vízszintes elmozdulás képletét a tetőpontra (ez a fele a maximális távnak):

$$s_x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

A tetőpontban a sebesség függőleges irányú komponense 0, ebből fejezzük ki az időt:

$$0 = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \quad \rightarrow t = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

Helyettesítsük be az első egyenletbe:

$$\sin(2 \propto) = 2 sin \propto cos \propto$$

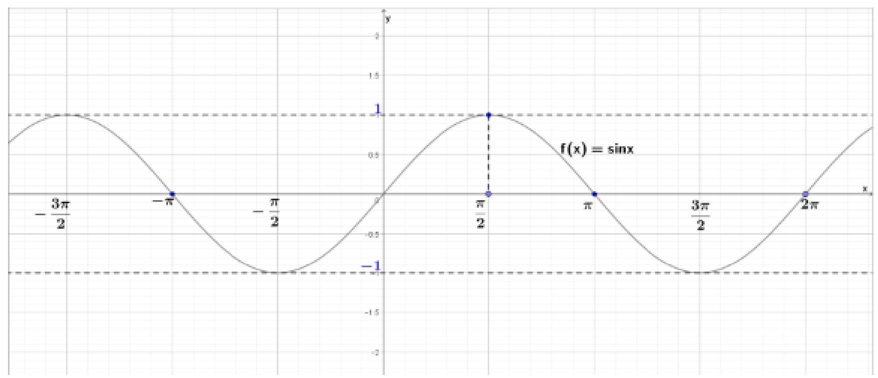
$$s_x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(2\alpha)$$

Az elmozdulás akkor lesz maximális, ha $\sin(2\alpha)$ maximális:

$$\sin(2\alpha) = 1$$
$$2\alpha = 90°$$
$$\boldsymbol{\alpha = 45°}$$

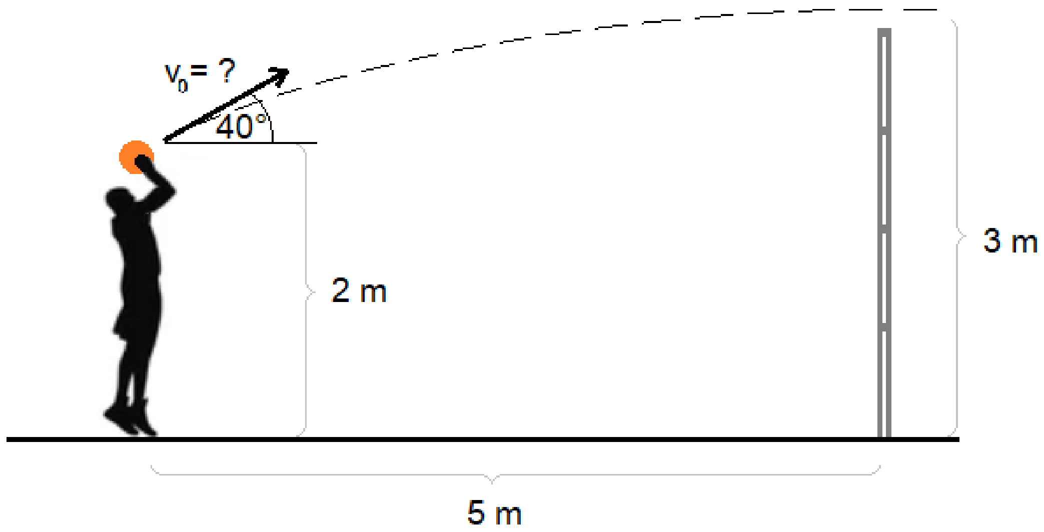
Tehát a vízszintes elmozdulás akkor lesz maximális, ha a kezdősebesség iránya a vízszintessel **45°**-os szöget zár be.

Trigonometrikus függvények: $f(x) = sinx$



Feladat:

5 m-re állunk egy 3 m magas kerítés előtt. Kezünkben 2 m magasan tartunk egy labdát. Mekkora nagyságú, a vízszintessel 40°-os szöget bezáró kezdősebességgel kell eldobnunk a labdát, ha azt szeretnénk, hogy az éppen átrepüljön a kerítés felett? (A légellenállástól eltekintünk.)



megoldás:

Írjuk fel a labda elmozdulásának komponenseit abban a pillanatban, amikor az a kerítés felett lesz:

Vízszintes komponens: $s_x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$

Függőleges komponens: $s_y = v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

$s_x = 5\ [m]$, $s_y = 3 - 2 = 1\ [m]$, v_0 és t ismeretlenek

Fejezzük ki *t*-t az első egyenletből: $5 = v_0 \cdot \cos 40° \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{5}{v_0 \cdot \cos 40°}$

Helyettesítsük be *t*-t a második egyenletbe és oldjuk meg:

$$1 = v_0 \cdot \sin 40° \cdot \frac{5}{v_0 \cdot \cos 40°} - \frac{9{,}81}{2} \cdot \left(\frac{5}{v_0 \cdot \cos 40°}\right)^2$$

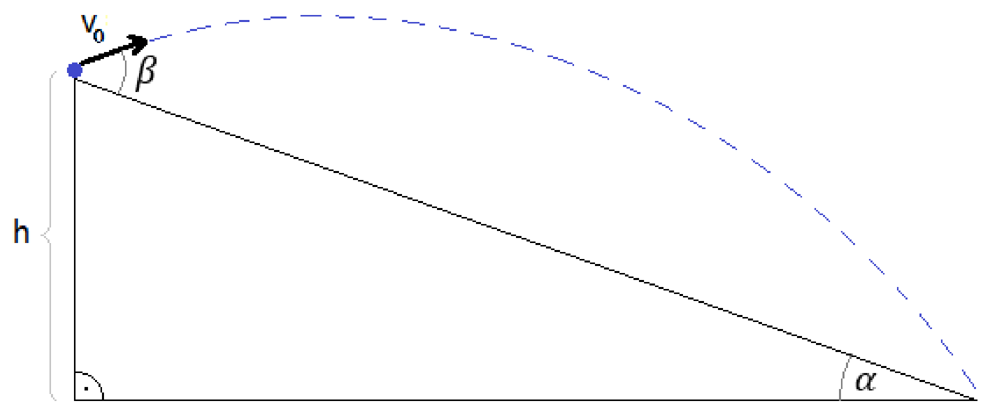
$$1 = 5 \cdot \mathrm{tg}\, 40° - \frac{9{,}81 \cdot 25}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 40°}$$

$$\mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{122{,}625}{\cos^2 40° \cdot (5 \cdot \mathrm{tg}\, 40° - 1)}} = \mathbf{8{,}09}\ \left[\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right]$$

Feladat:

Egy h magasságú, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró lejtő tetejéről, a lejtővel 40°-os szöget bezáró, 30 km/h nagyságú kezdősebességgel eldobunk egy követ, mely éppen a lejtő aljára esik le.

Milyen magas a lejtő? (A légellenállástól eltekintünk.)



<u>megoldás:</u>

A kezdősebesség a vízszintessel $\gamma = \beta - \alpha = 40 - 30 = 10°$-ot zár be. $\left(v_0 = 30 \left[\frac{km}{h}\right] = 8{,}33 \left[\frac{m}{s}\right]\right)$

Írjuk fel a labda elmozdulásának komponenseit abban a pillanatban, amikor az a lejtő alján lesz:

Vízszintes komponens: $s_x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\gamma \cdot t$

Függőleges komponens: $s_y = v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot \sin\gamma \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

$s_y = -h, \qquad s_x = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad h \text{ és } t \text{ ismeretlenek}$

Fejezzük ki t-t az első egyenletből: $t = \frac{h}{v_0 \cdot \cos\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{h}{8{,}33 \cdot \cos 10° \cdot \operatorname{tg} 30°} = \frac{h}{4{,}738}$

Helyettesítsük be t-t a második egyenletbe és oldjuk meg:

$$-h = 8{,}33 \cdot \sin 10° \cdot \frac{h}{4{,}738} - \frac{9{,}81}{2} \cdot \left(\frac{h}{4{,}738}\right)^2$$

$$0 = h \cdot (1{,}305 - 0{,}218 \cdot h)$$

$$h = \frac{1{,}305}{0{,}218} \approx \mathbf{6[m]}$$

Köszönöm a figyelmet!